



DOI: 10.18276/sip.2016.44/2-14

**Robert Kruszewski\***

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

## ATRAKTORY OKRESOWE, QUASI-OKRESOWE I CHAOTYCZNE W NIELINIOWYM MODELU HICKSA

### STRESZCZENIE

W artykule skonstruowany będzie nieliniowy model Hicksa, uwzględniający nieliniową funkcję inwestycji i konsumpcji. Opisane zostaną możliwe typy ścieżek czasowych. Zbadany zostanie także wpływ parametrów na dynamikę modelu.

**Słowa kluczowe:** cykl koniunkturalny, równowaga, chaos deterministyczny, bifurkacja

### Wprowadzenie

Teorie cyklu koniunkturalnego, oparte na współdziałaniu mnożnika i akceleratora, zostały opracowane w latach czterdziestych XX wieku. W ostatnim czterdziestoleciu następował rozwój tych teorii, w wyniku czego powstało wiele nieliniowych modeli dynamicznych. Jest to efektem pojawienia się nowych metod badawczych nieliniowych układów dynamicznych, będących matematyczną reprezentacją modeli ekonomicznych. Narzędzia te to teoria bifurkacji (głównie bifurkacja Neimark-Sackera i bifurkacja Hopfa) oraz zdefiniowane w połowie lat siedemdziesiątych XX wieku przez Li oraz Yorke'a pojęcie chaosu deterministycznego. Zastosowanie

---

\* E-mail: rkrusz@sgh.waw.pl

bifurkacji podwajania okresu i bifurkacji Neimarka-Sackera dla modeli z czasem dyskretnym oraz bifurkacji Hopfa dla modeli z czasem ciągłym pozwoliło na rekonstrukcję wielu wcześniejszych idei cyklu koniunkturalnego. Opisanie zjawiska chaosu deterministycznego postawiło w innym świetle zagadnienie wyjaśniania zjawiska falowania zmiennych ekonomicznych i przygotowywania prognoz tychże zmiennych. Chaos deterministyczny, który może pojawić się już w bardzo prostych modelach makroekonomicznych (np. J.M. Keynesa, J.R. Hicksa, P.A. Samuelsona), przedstawia klasyczną teorię koniunktury oraz skuteczność i efektywność polityki społeczno-gospodarczej w nowym świetle. Z metodologicznego punktu widzenia bardzo ważny jest fakt, że oto istnieje nowy typ zachowania się szerokiej klasy nieliniowych deterministycznych układów dynamicznych, w których występuje ruch chaotyczny. Ruch ten charakteryzuje się wysokim stopniem skomplikowania trajektorii i lokalizuje się na pewnych podzbiorach przestrzeni fazowej, zwanych atraktorami. Badanie okresowej, quasi-okresowej i chaotycznej dynamiki modeli cyklu koniunkturalnego, od lat osiemdziesiątych XX wieku, stanowi jeden z głównych nurtów ekonomii matematycznej.

Modele Samuelsona i Hicksa ze względu na swą prostotę i deskryptywny charakter stanowią idealną bazę do badania różnych sposobów modelowania strumienia konsumpcji i inwestycji oraz wyjaśniania cech morfologicznych cykli gospodarczych. Hommes, Saura, Vazquez i Vegas (1998) badali model Hicksa z dolnym ograniczeniem na poziom inwestycji i górnym na wielkość produktu krajowego. Puu, Gardini i Sushko (2005) także badali model Hicksa z ograniczeniami, w którym dolne ograniczenie poziomu inwestycji zostało powiązane z całkowitym zasobem kapitału w modelowanej gospodarce. Matsumoto i Szidarovszky (2015) rozważali nieliniowy model mnożnika i akceleratora z opóźnionym argumentem funkcji inwestycji i konsumpcji. Analizie modelu Hicksa z nieliniową funkcją inwestycji poświęcona jest także praca Puu i Sushko (2004).

Celem niniejszej pracy jest zbadanie dynamiki nieliniowego modelu Hicksa ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów okresowych i quasi-okresowych, opisanie mechanizmów prowadzących do powstawania tychże atraktorów oraz określenie warunków, jakie muszą zaistnieć, by wystąpiło zjawisko chaosu deterministycznego.

Do zbudowania i analizy nieliniowego modelu Hicksa użyte będą narzędzia ekonomii matematycznej, w tym teoria nieliniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym i teoria bifurkacji. Realizacji postawionych celów podporządko-

wana jest struktura artykułu. Część pierwsza zawiera opis dyskretnej wersji modelu Hicksa. Część druga opisuje położenia równowagi i lokalne zjawiska bifurkacyjne zachodzące w badanym modelu. Część trzecia poświęcona jest analizie numerycznej zaproponowanego modelu, ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów cyklicznych, quasi-okresowych i chaotycznych. Konkluzje zawarte są w ostatniej części.

## 1. Liniowy model Hicksa

Model Hicksa oparty jest na zasadzie współdziałania keynesowskiego mnożnika i zasady akceleracji. Opisuje on dynamikę produktu krajowego hipotetycznej gospodarki. Model liniowy stanowić będzie odniesienie do modelu nieliniowego, który zostanie przedstawiony w dalszej części pracy.

Zakładam, że konsumpcja w okresie bieżącym  $C_t$  jest wprost proporcjonalna do produktu krajowego z okresu poprzedniego  $Y_{t-1}$ :

$$C_t = C_a + (1-s)Y_{t-1}, \quad 0 < s < 1 \quad (1)$$

gdzie  $s$  reprezentuje skłonność do oszczędzania, a  $C_a > 0$  konsumpcję autonomiczną. Inwestycje  $I_t$  są sumą stałych inwestycji autonomicznych  $I_a = const$  i inwestycji indukowanych, które są proporcjonalne do zmiany poziomu produktu krajowego:

$$I_t = I_a + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \quad v > 0, \quad (2)$$

gdzie  $v$  jest akceleratorem.

Produkt krajowy, w każdym okresie, przeznaczany jest na konsumpcję, inwestycje i wydatki rządowe ( $G_t = G_a > 0$ ), które są stałe w każdym okresie. Równanie bilansowe opisujące równowagę przyjmuje postać:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (3)$$

Matematycznym modelem opisującym dynamikę produktu krajowego opisanego zależnościami (1)–(3) jest równanie różnicowe liniowe drugiego rzędu:

$$Y_t = I_a + C_a + G_a + (1-s+v)Y_{t-1} - vY_{t-2} \quad (4)$$

Produkt krajowy w okresie bieżącym zależy od wydatków autonomicznych i wielkości produktu krajowego w dwóch poprzednich okresach. Powyższe równanie różnicowe posiada jedną równowagę stacjonarną, która jest punktem stałym równa-

nia (4) i spełnia warunek  $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y_e$ , gdzie  $Y_e = \frac{1}{s}(I_a + C_a + G_a)$ . Oscylacje ścieżki czasowej będącej rozwiązaniem równania (4) zależą od pierwiastków  $\lambda_{1,2}$ , równania charakterystycznego związanego z równaniem (4):

$$\lambda^2 - (1 - s + v)\lambda + v = 0 \quad (5)$$

W liniowym modelu Hicksa występują jedynie oscylacje właściwe związane z zespolonymi pierwiastkami równania (5). Oscylacje niewłaściwe, związane z ujemnymi rzeczywistymi pierwiastkami równania charakterystycznego, nie występują – rzeczywiste pierwiastki równania (5) są zawsze dodatnie. Oscylacje o malejącej amplitudzie występują, gdy  $0 < v < 1$  oraz  $s > 1 + v - 2\sqrt{v}$ . Oscylacje o stałej amplitudzie występują, gdy akcelerator jest równy jedności, a skłonność do oszczędzania przyjmuje dowolną dopuszczalną wartość.

Możliwe typy ścieżek czasowych w przedstawionym modelu liniowym to: zbieżność do równowagi (monotoniczna lub z gasnącymi oscylacjami), cykliczne wahania (o stałej amplitudzie) wokół równowagi i oscylacje o rosnącej amplitudzie. W odpowiedzi na powyższe ograniczenia modelu liniowego (uboga dynamika, trywialny atraktor punktowy), nieliniowa wersja modelu Hicksa będzie przedstawiona w dalszej części pracy. Zmianie ulegnie sposób modelowania zarówno strumienia konsumpcji, jak i strumienia inwestycji indukowanych. W miejsce liniowych zależności będą wprowadzone relacje nieliniowe.

## 2. Nieliniowy model Hicksa

W większości wersji modelu Hicksa strumień konsumpcji zależy liniowo od produktu krajowego w okresie poprzednim. Niektórzy badacze uzależniają konsumpcję w okresie bieżącym od wielkości produktu krajowego w kilku poprzednich okresach (Puu, 2003). Oddzielną klasę stanowią modele, w których opis strumienia konsumpcji oparty jest na oczekiwanej wielkości produktu krajowego w okresie bieżącym.

W konstruowanym nieliniowym modelu Hicksa funkcja konsumpcji przyjmuje postać:

$$C_t = C_a + (1 - s)Y_{t-1}^\alpha, \quad 0 < s < 1 \quad (6)$$

gdzie  $C_a > 0$  oznacza konsumpcję autonomiczną, a  $0 < s < 1$  oznacza skłonność do oszczędzania. Parametr  $\alpha > 0$  przyjmuje wartości bliskie jedności. Przyjęta postać

funkcji konsumpcji pozwala badać własności modelu, w przypadku gdy faktyczne zachowania konsumpcyjne różnią się od przyjętych założeń teoretycznych, związanych z liniową zależnością od poziomu produktu krajowego w okresie  $t - 1$ .

Funkcja inwestycji w pierwotnym modelu Hicksa jest funkcją liniową zależną od różnicy produktu krajowego w okresach  $t - 1$  i  $t - 2$ . Ten sposób modelowania strumienia inwestycji jest dość kłopotliwy i już Hicks w 1950 roku sugerował zastąpienie funkcji liniowej funkcją kawałkami liniową. Wiązało się to z wprowadzeniem górnego i dolnego ograniczenia strumienia inwestycji. Goodwin (1951) zaproponował modyfikację propozycji przedstawionej przez Hicksa, która polegała na asymptotycznej zbieżności do ograniczeń zaproponowanych przez Hicksa. Idea Goodwina przekłada się na zastosowanie funkcji arcustangens do modelowania strumienia inwestycji. Puu (2003) w modelowaniu strumienia inwestycji uwzględnia także inwestycje rządowe i cały proces opisuje przy pomocy wielomianu trzeciego stopnia:

$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3, v > 0 \quad (7)$$

W niniejszej pracy uwzględnione będą dodatkowo inwestycje autonomiczne  $I_a > 0$ , zatem

$$I_t = I_a + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3, v > 0 \quad (8)$$

Podstawiając równania (8) i (6) do równania bilansowego (3) otrzymujemy autonomiczne równanie różnicowe nieliniowe drugiego rzędu:

$$Y_t = (1-s)Y_{t-1}^\alpha + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3 + I_a + C_a + G_a \quad (9)$$

które jest równoważne następującemu autonomicznemu układowi dwóch równań różnicowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} Y_t = (1-s)Y_{t-1}^\alpha + v(Y_{t-1} - X_{t-1}) - v(Y_{t-1} - X_{t-1})^3 + I_a + C_a + G_a \\ X_t = Y_{t-1} \end{cases} \quad (10)$$

Powyższy układ równań różniczkowych jest nieliniowy i, dodatkowo, nie istnieje jego analityczne rozwiązanie opisujące zachowanie się zmiennych  $(Y_t, X_t)$  w każdej chwili czasu  $t$ . Do analizy układu (10) zostaną użyte narzędzia jakościowej teorii nieliniowych równań różnicowych.

Niech  $F : R^2 \rightarrow R^2$  będzie odwzorowaniem oznaczającym prawą stronę układu (10):

$$F(y, x) = \begin{cases} (1-s)y^\alpha + v(y-x) - v(y-x)^3 + I_a + C_a + G_a \\ y \end{cases} \quad (11)$$

Pierwszym elementem jakościowej analizy układu (10) jest wyznaczenie położenia równowagi (rozwiązania stacjonarnego). Równowaga układu (10) jest punktem stałym odwzorowania  $F$ . Punkt stały  $(y_*, x_*)$  odwzorowania  $F$  spełniają warunek:

$$F(y_*, x_*) = (y_*, x_*) \quad (12)$$

który jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} (1-s)y_*^\alpha = y_* - I_a + C_a + G_a \\ x_* = y_* \end{cases} \quad (13)$$

### **Twierdzenie 1.**

Jeżeli  $I_a = C_a = G_a = 0$ , to odwzorowanie  $F$  posiada dwa punkty stałe  $E_1(0,0)$  i  $E_2\left((1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}, (1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ .

*Dowód:*

Przy przyjętym założeniu zerowych wydatków autonomicznych warunek (13) redukuje się do układu równań:

$$\begin{cases} (1-s)y_*^\alpha = y_* \\ x_* = y_* \end{cases},$$

który posiada dwa rozwiązania:  $E_1(0,0)$  i  $E_2\left((1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}, (1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ .

### **Twierdzenie 2.**

Jeżeli  $I_a + C_a + G_a > 0$  oraz  $0 < \alpha < 1$ , to odwzorowanie  $F$  posiada jeden punkt stały  $E(y_*, y_*)$  taki, że  $y_* > (1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

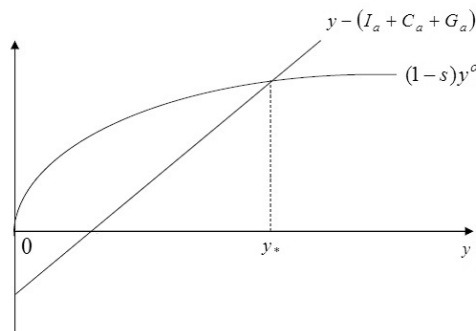
*Dowód:*

Przy założeniu dodatnich wydatków autonomicznych warunek (13) redukuje się do równania:

$$(1-s)y_*^\alpha = y_* - (I_a + C_a + G_a),$$

które dla  $0 < \alpha < 1$  posiada dokładnie jedno rozwiązanie (rys. 1) spełniające nierówność  $y_* > (1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . Redukowanie wydatków autonomicznych przesuną prostą  $y - (I_a + C_a + G_a)$  do góry oraz powoduje zbieżność z prawej strony  $y_*$  do wartości granicznej równiej  $(1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

Rysunek 1. Istnienie i jednoznaczność równowagi dla  $0 < \alpha < 1$



Źródło: obliczenia własne.

### Twierdzenie 3.

Założmy, że  $\alpha > 1$ . Odwzorowanie  $F$  posiada dwa punkty stałe  $E_1(y_1, y_1)$  i  $E_1(y_2, y_2)$  takie, że  $y_1 < (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}} < y_2$ , jeśli  $0 < I_a + C_a + G_a < (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \frac{1}{\alpha})$ . Dla  $I_a + C_a + G_a = (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \frac{1}{\alpha})$  odwzorowanie  $F$  posiada jeden punkt stały  $E_1(y_1, y_1)$  takie, że  $y_1 = (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ , a dla  $I_a + C_a + G_a > (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \frac{1}{\alpha})$  odwzorowanie  $F$  nie posiada punktów stałych.

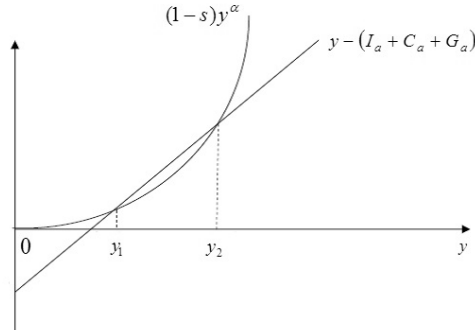
*Dowód:*

Przy założeniu dodatnich wydatków autonomicznych warunek (13) redukuje się do równania:

$$(1-s)y_*^\alpha = y_* - (I_a + C_a + G_a) \quad (14)$$

Lewa strona powyższego równia jest rosnącą funkcją wypukłą. Prosta  $y - (I_a + C_a + G_a)$  może nie mieć punktów wspólnych, może być styczna lub może być sieczną wykresu funkcji  $(1-s)y^\alpha$  (rys. 2), co przekłada się na brak rozwiązań, jedno rozwiązanie lub dwa rozwiązania równania (14).

Rysunek 2. Istnienie położenia równowagi dla  $\alpha > 1$



Źródło: obliczenia własne.

Kolejnym etapem analizy jakościowej badanego modelu jest ustalenie warunków, jakie muszą spełniać zmienne egzogeniczne, by stany stacjonarne były lokalnie asymptotycznie stabilne. Stabilność równowagi stacjonarnej układu (10) zależy od wartości własnych macierzy Jakobiego odwzorowania  $F$ , która przyjmuje postać:

$$J(y, x) = \begin{bmatrix} (1-s)\alpha y^{\alpha-1} + v - 3v(y-x)^2 & -v + 3(y-x)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Analizę lokalnej asymptotycznej stabilności punktów stałych (rozwiązań stacjonarnych) układu (10) rozpoczyna od przypadku, gdy  $I_a = C_a = G_a = 0$  i  $\alpha > 1$ . Macierz Jakobiego odwzorowania  $F$  w punkcie  $E_1$  i  $E_2$  przyjmuje postać:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} v & -v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(E_2) = \begin{bmatrix} \alpha + v & -v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Równowaga stacjonarna  $E_i$  układu (10) jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy moduły wartości własnych macierzy linearyzacji  $J(E_i)$  są mniejsze od jedności. Warunek ten jest spełniony jeśli (Medio, Lines, 2001):

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tr}J(E_i) + \det J(E_i) &> 0 \\ 1 - \operatorname{tr}J(E_i) + \det J(E_i) &> 0 \\ 1 - \det J(E_i) &> 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Pierwsze dwie nierówności warunku (16) dla macierzy  $J(E_1)$  są spełnione dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów modelu, gdyż  $\det J(E_1) = \operatorname{tr}J(E_1) = v > 0$ . Trzeci warunek jest spełniony, gdy  $0 < v < 1$ . Druga nierówność  $1 - \operatorname{tr}J(E_2) + \det J(E_2) = 1 - \alpha$  dla macierzy  $J(E_2)$  nie jest spełniona ( $\alpha > 1$ ) i tym samym równowaga  $E_2$  jest niestabilna.

Analizując przypadek zerowych wydatków autonomicznych i  $0 < \alpha < 1$  można stwierdzić, iż równowaga  $E_1$  jest niestabilna, a równowaga  $E_2$  jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy  $0 < v < 1$ .

### Wniosek:

Jeśli  $I_a = C_a = G_a = 0$  i  $\alpha > 1$  ( $0 < \alpha < 1$ ), to równowaga  $E_2$  ( $E_1$ ) jest zawsze niestabilna, a równowaga  $E_1$  ( $E_2$ ) jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy  $0 < v < 1$ .

Macierz Jakobiego odwzorowania  $F$ , dla  $I_a + C_a + G_a > 0$  i  $\alpha > 1$ , w położeniach równowagi  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) przyjmuje postać:

$$J(E_i) = \begin{bmatrix} (1-s)\alpha y_i^{\alpha-1} + v & -v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ślad i wyznacznik macierzy linearyzacji są dodatnie i równe:  $\operatorname{tr}J(E_i) = (1-s)\alpha y_i^{\alpha-1} + v$ ,  $\det J(E_i) = v$ . Ślad macierzy Jakobiego spełnia warunek:  $\operatorname{tr}J(E_1) < 1 + v < \operatorname{tr}J(E_2)$ , gdyż  $y_1 < (\frac{1}{(1-s)\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}} < y_2$ , zatem równowaga  $E_1$  jest lokalnie asymptotycznie stabilna, jeśli  $0 < v < 1$ , gdyż  $\det J(E_1) = v$ . Równowaga  $E_2$  jest niestabilna, ponieważ  $1 - \operatorname{tr}J(E_2) + \det J(E_2) = 1 + v - \operatorname{tr}J(E_2) < 0$ .

Macierz Jakobiego odwzorowania  $F$ , dla  $I_a + C_a + G_a > 0$  i  $0 < \alpha < 1$ , w równowadze  $E$  przyjmuje postać:

$$J(E) = \begin{bmatrix} (1-s)\alpha y_*^{\alpha-1} + v & -v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Równowaga  $E$  jest lokalnie asymptotycznie stabilna dla  $0 < v < 1$ , gdyż wówczas warunek (16) jest spełniony. Pierwsza nierówność w sposób trywialny (śląd i wyznacznik są dodatnie), druga nierówność  $1 - \text{tr}J(E_2) + \det J(E_2) < 1 - \alpha$  jest prawdziwa, gdyż  $y_* > (1-s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  i  $0 < \alpha < 1$ , a trzecia jest równoważna nierówności  $1 - v > 0$ .

### Wniosek:

Jeśli  $I_a + C_a + G_a > 0$  i  $\alpha > 1$ , to równowaga  $E_2$  jest zawsze niestabilna, a równowaga  $E_1$  jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy  $0 < v < 1$ .

Jeśli  $I_a + C_a + G_a > 0$  i  $0 < \alpha < 1$ , to równowaga  $E$  jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy  $0 < v < 1$ .

### 3. Bifurkacje, atraktory i dynamika globalna

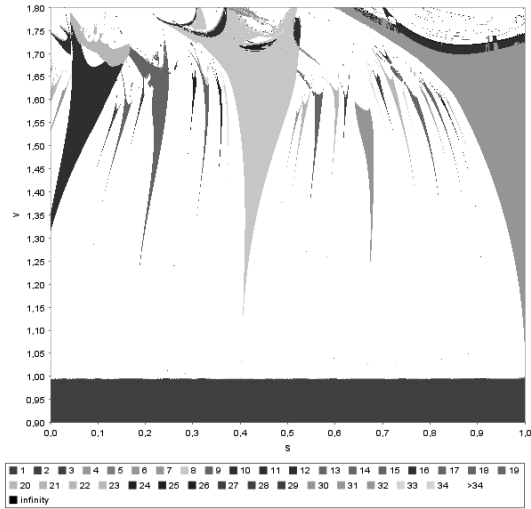
Jedną z fundamentalnych cech nieliniowych równań różnicowych jest duża różnorodność możliwych scenariuszy opisujących dynamiczne własności rozwiązań. Rozwiązania mogą zbiegać do równowagi stacjonarnej, rozwiązania okresowego, quasi-okresowego lub zachowywać się chaotycznie. Rozwiązania chaotyczne są wrażliwe na małe zmiany warunku początkowego. Własność ta istotnie ogranicza zakres prognozy badanej zmiennej ekonomicznej i uwypukla istotność badania dynamiki nieliniowych modeli ekonomicznych pod kątem występowania zjawiska chaosu deterministycznego. By móc analizować trajektorie cykliczne, quasi-okresowe i chaotyczne w badanym modelu, konieczne jest przekroczenie granicy obszaru asymptotycznej stabilności stanów stacjonarnych, wyznaczonych w części drugiej niniejszej pracy. Przekraczanie obszaru lokalnej asymptotycznej stabilności wiąże się z występowaniem zjawiska bifurkacji.

W badanym modelu występują dwa typy bifurkacji: bifurkacja styczna i bifurkacja Neimarka-Sackera. W wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera, w układzie dyna-

micznym, pojawiają się orbity okresowe lub quasi-okresowe. W wyniku bifurkacji stycznej w badanym modelu zmienia się liczba równowag stacjonarnych. Naruszenie drugiej nierówności w warunku (16) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji stycznej (*fold bifurcation*) zwanej także bifurkacją typu siodło-węzeł (*saddle-node bifurcation*). Wówczas jedna z wartości własnych macierzy linearyzacji jest równa 1. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy  $1 - \text{Tr}J(E_i) + \text{Det}J(E_i) = 0$  oraz  $\text{Tr}J(E_i) \in (0, 2)$  i  $\text{Det}J(E_i) \in (-1, 1)$  (pozostałe warunki są spełnione). Ten typ bifurkacji zachodzi przy dodatnich wydatkach autonomicznych i  $\alpha > 1$ . Wraz ze zwiększającymi się wydatkami autonomicznymi równowagi  $E_1$  i  $E_2$  przybliżają się do siebie i po przekroczeniu granicznej wartości (punkt bifurkacji) w badanym modelu nie istnieją już równowagi stacjonarne. Naruszenie trzeciej nierówności w warunku (16) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji Neimarka-Sackera. Wówczas macierz linearyzacji ma parę zespolonych sprzężonych wartości własnych, których moduł jest równy jedności. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy  $1 - \text{Det}J(E_i) = 0$  oraz pierwsze dwie nierówności są spełnione, tj.  $\text{Tr}J(E_i) \in (-2, 2)$ . W badanym modelu utrata stabilności przez równowagę stacjonarną, w wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera, prowadzi zawsze do powstania atraktorów quasi-okresowych.

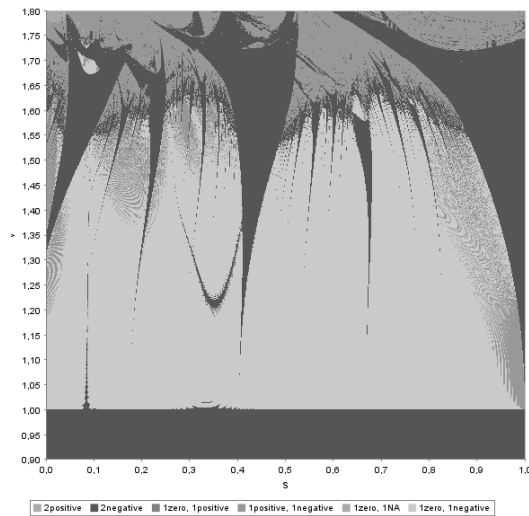
Na rysunku 3 przedstawiono dwuwymiarowy diagram bifurkacyjny badanego modelu dla parametrów  $(s, v)$ . Odcieniami szarości zaznaczono wartości parametrów, dla których ścieżka czasowa produktu krajowego zbiega do atraktorów okresowych. Kolorem białym zaznaczono kombinacje, dla których w badanym modelu istnieją atraktory quasi-okresowe lub chaotyczne. Rozróżnienie między atraktorami chaotycznymi i quasi-okresowymi umożliwiają wykładniki Lapunowa (rys. 4). Atraktory quasi-okresowe charakteryzuje zerowa wartość największego wykładnika Lapunowa i ujemna wartość drugiego wykładnika. Atraktory chaotyczne wyróżnia co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. Równowaga stacjonarna jest asymptotycznie stabilna dla wartości akceleratora mniejszych od jedności ( $0 < \alpha \leq 1$ ) i wszystkich dopuszczalnych wartości parametru  $s$ . W przypadku ( $\alpha > 1$ ) o stabilności równowagi stacjonarnej decyduje także skłonność do oszczędzania. Istnieje progowa wartość parametru  $s$ , po przekroczeniu której równowaga stacjonarna będzie asymptotycznie stabilna. Własność ta związana jest z bifurkacją styczną występującą w badanym modelu.

Rysunek 3. Diagram bifurkacyjny ( $0 < \alpha < 1$ )



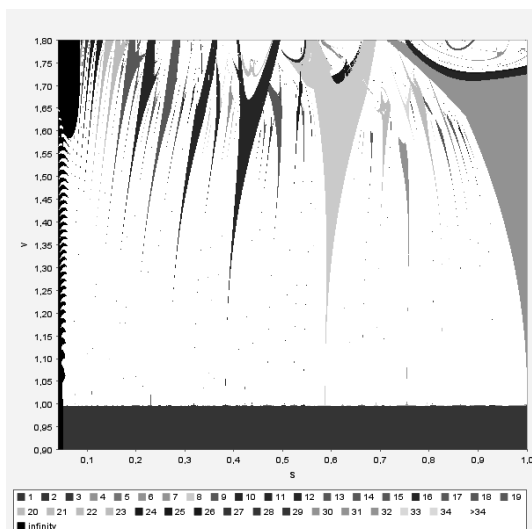
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4. Wykładniki Lapunowa ( $0 < \alpha < 1$ )



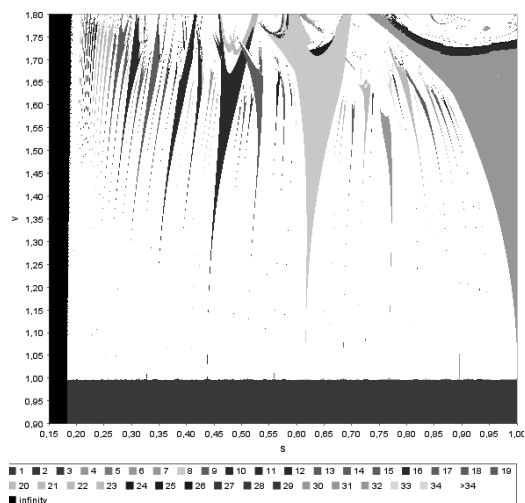
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 5. Diagram bifurkacyjny ( $\alpha = 1$ )



Źródło: obliczenia własne.

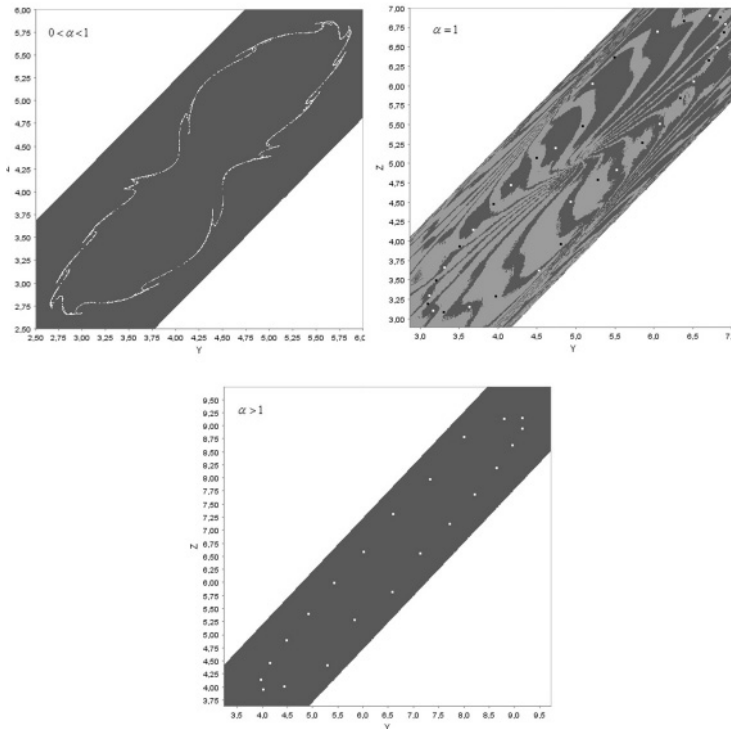
Rysunek 6. Diagram bifurkacyjny ( $\alpha > 1$ )



Źródło: obliczenia własne.

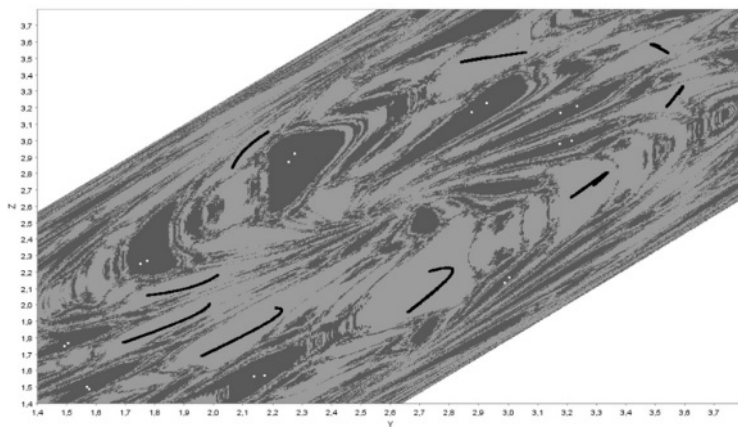
Niezależnie od wartości parametru  $\alpha$ , powyżej prostej  $v = 1$  (rys. 3, 5, 6) występują atraktory quasi-okresowe. W wyniku bifurkacji globalnych w obszarze tym pojawiają się tzw. jęzory Arnoldda, obszary zmienności parametrów  $(s, v)$ , dla których w badanym modelu istnieją atraktory okresowe. Wraz ze wzrostem akceleratora obszary te stają się coraz większe i dodatkowo zanikają atraktory quasi-okresowe oraz pojawiają się atraktory chaotyczne. Przedstawione diagramy bifurkacyjne ukazują także wpływ parametru  $\alpha$  na długookresową dynamikę produktu krajowego. W przestrzeni parametrów  $(s, v)$  następuje przesunięcie w prawo i kompresja obszarów występowania atraktorów cyklicznych. Dodatkowo dla  $\alpha > 1$  warunkiem istnienia jakichkolwiek atraktorów jest odpowiednio wysoka skłonność do oszczędzania.

Rysunek 7. Atraktory i ich obszary przyciągania



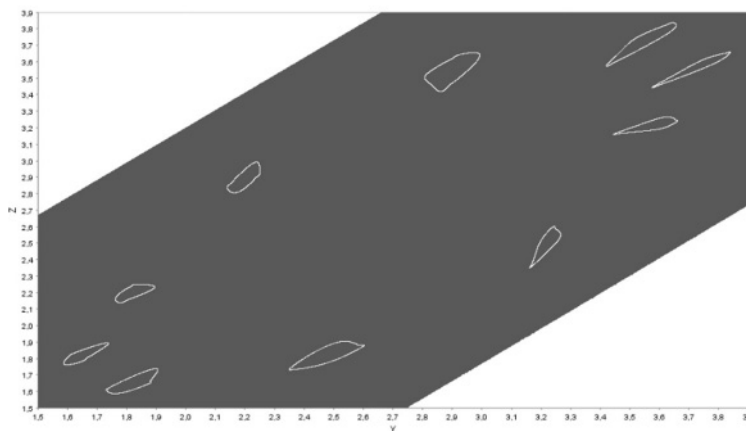
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 8. Atraktor chaotyczny i okresowy wraz z obszarami przyciągania



Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 9. Atraktor chaotyczny



Źródło: obliczenia własne.

Możliwe typy atraktorów wraz z ich obszarami przyciągania przedstawiaj one są na rysunkach 7, 8 i 9. Długookresowa dynamika produktu krajowego dla nieznacznie różniących się wartości parametru  $\alpha$  może być całkowicie odmienna.

Przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów modelu trajektoria produktu krajowego zbiega do: atraktora quasi-okresowego dla  $\alpha = 0.97$ , jednego z dwóch współistniejących atraktorów okresowych dla  $\alpha = 1$  i do atraktora okresowego dla  $\alpha = 1.03$  (rys. 7). Dodatkowo dla  $\alpha = 1$ , o zbieżności do jednego z współistniejących atraktorów cyklicznych, decyduje pozycja wyjściowa gospodarki. Współistnienie atraktorów o różnym charakterze jest cechą badanego modelu. Oprócz współistniejących atraktorów okresowych współistnieją także atraktory chaotyczne i okresowe (rys. 8). Na szczególną uwagę zasługuje atraktor quasi-okresowy (rys. 9). Atraktor ten składa się z dziesięciu części, które są cyklicznie odwiedzane. W obrębie każdej części występuje dynamika quasi-okresowa.

## Podsumowanie

Liniowy model Hicksa obrazujący współdziałanie mnożnika i akceleratora jest klasycznym (obok modelu Samuelsona) przykładem modelu cyklu koniunkturalnego opartego na połączonym działaniu efektu mnożnikowego i zasady akceleracji. Stanowi on znakomitą bazę do zbadania wpływu nieliniowej funkcji inwestycji i konsumpcji na dynamikę produktu krajowego. Dynamika modelu nieliniowego jest bardziej złożona, występuje zjawisko wielostabilności, począwszy od współistnienia rozwiązań cyklicznych o różnej częstotliwości i amplitudzie po współistnienie atraktorów cyklicznych i chaotycznych. Równowaga występująca w liniowym modelu Hicksa, jak i równowaga w modelu nieliniowym jest stabilna asymptotycznie, gdy akcelerator jest mniejszy od jedności. Utrata lokalnej stabilności przez równowagę, w modelu nieliniowym, nie oznacza niestabilności modelu. Pojawiają się atraktory cykliczne, quasi-okresowe i chaotyczne, które są matematycznym modelem endogenicznego cyklu koniunkturalnego. Występowanie atraktorów cyklicznych związane jest z odpowiednio wysokimi wartościami akceleratora i jest to czynnik decydujący. Rola skłonności do oszczędzania jest drugorzędna. Parametr  $\alpha$  związany z funkcją konsumpcji przy ustalonych wartościach parametrów  $v$  i  $s$  w sposób istotny może wpływać na długookresowe własności ścieżki czasowej produktu krajowego (rys. 7). Odmienne oddziaływanie parametru  $\alpha$  uwidaczniają dwuwymiarowe diagramy bifurkacyjne w przestrzeni  $(s, v)$  (rys. 3, 5, 6). Charakter zmian i ich mechanizm jest niezmienny, następuje jedynie przesunięcie w prawo i kompresja obszarów związanych z występowaniem atraktorów okresowych. Dla  $\alpha > 1$  przesunięcie



w prawo jest na tyle duże, że istnienie jakichkolwiek atraktorów powiązane jest z odpowiednio wysoką skłonnością do oszczędzania ( $s > 0,15$ ).

## Literatura

- Gallegati, M., Gardini, L., Puu, T., Sushko, I. (2003). Hicks' trade cyclere visited: cycles and bifurcations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 63, 505–527.
- Goodwin, R.M. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, 19, 1–17.
- Hicks, J.R. (1950). *A contribution to the theory of the trade cycle*. Oxford: Oxford University Press.
- Lorenz, H.W. (1992). Multiple attractors, complex basin boundaries, and transient motion in deterministic economic systems. W: G. Feichtinger (red.), *Dynamic economic models and optimal control*. Amsterdam.
- Manfredia, P., Fantib, L. (2004). Cycles in dynamic economic modeling. *Economic Modelling*, 21, 573–594.
- Matsumoto, A., Szidarovszky, F. (2015). Nonlinear multiplier-accelerator model with investment and consumption delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, 33, 1–9.
- Medio, A., Lines M. (2001). *Economic Dynamics. A Primer*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Puu, T. (2003). *Attractors, bifurcations, & chaos*. Berlin–Heilderberg–New York: Springer.
- Puu, T., Gardini, L., Sushko, I. (2005). A Hicksian multiplier-accelerator model with floor determined by capital stock. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 56, 331–348.
- Puu, T., Sushko, I. (2004). A business cycle model with cubic nonlinearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 597–612.
- Saura, D., Vazquez, F.J., Vegas, J.M. (1998). Non-chaotic oscillations in some regularized Hicks models. A restatement of the ceiling and floor conditions. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 661–678.
- Sushko, I., Gardini, L., Puu, T. (2010). Regular and chaotic growth in a Hicksian floor/ceiling model. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 75, 77–94.

**PERIODIC, QUASIPERIODIC AND CHAOTIC ATTRACTORS  
IN A NONLINEAR HICKS BUSINESS CYCLE MODEL**

**Abstract**

We investigate the dynamics of the proposed Hicks-like business cycle model with nonlinear investment and consumption functions. The possible long-term behaviour of the national income has been described. We investigate, how the dynamics of the model depend on parameters.

**Keywords:** business cycle, equilibrium, chaos, bifurcation, attractor

**JEL code:** C02, C62, E32