Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia nr 1/2018 (91)

DOI: 10.18276/frfu.2018.91-40 s. 501–513

Symetryczne opcje potęgowe – propozycja nowej koncepcji wyceny za pomocą transformaty Fouriera

Arkadiusz Orzechowski[*]

Streszczenie: *Cel* – Prezentacja nowego sposobu wyceny symetrycznych opcji potęgowych oraz porównanie go z alternatywnymi koncepcjami, które mogą być wykorzystane do określania wartości teoretycznych będących przedmiotem zainteresowania instrumentów, tj. koncepcjami F. Blacka i M. Scholesa oraz J. Zhu.
Metodologia badania – Sprawdzenie dokładności i szybkości obliczeniowej każdej z prezentowanych koncepcji. W przypadku modelu F. Blacka i M. Scholesa obliczenia dokonywane są w sposób analityczny, w przypadku podejść opartych na transformacie Fouriera wykorzystywane jest podejście numeryczne.
Wynik – Wykorzystanie transformaty Fouriera do wyceny opcji powoduje spowolnienie procesu wyceny w stosunku do podejścia zaproponowanego przez F. Blacka i M. Scholesa. Ze względu jednak na uniwersalizm koncepcji bazujących na transformacie Fouriera (możliwość ich wykorzystania do określenia wartości opcji w warunkach losowości wariancji cen aktywów bazowych) nie można ich uznać za jednoznacznie gorsze.
Oryginalność – Możliwość aplikacji autorskiej metody bazującej na transformacie Fouriera do wyznaczania wartości symetrycznych opcji potęgowych oraz analizę jej szybkości i dokładności obliczeniowej.

Słowa kluczowe: symetryczne opcje potęgowe, transformata Fouriera, model Blacka-Scholesa

Wprowadzenie

Jednym z najbardziej istotnych elementów teorii finansów jest wycena instrumentów służących zarówno do wystawiania się na ryzyko (w celu osiągnięcia korzyści), jak również zabezpieczania się przed nim. Przykładem takiego rodzaju instrumentu są opcje. Za prekursora badań nad nimi należy uznać L. Bacheliera (1900), który jako pierwszy wykorzystał geometryczny ruch Browna do modelowania cen aktywów, od których uzależniona jest wartość kontraktów bazujących na prawach pochodnych. Osiągnięcia L. Bacheliera należy uznać za podstawę budowy modelu F. Blacka i M. Scholesa (Black, Scholes, 1973), który obecnie jest powszechnie wykorzystywany do wyznaczania tzw. cen sprawiedliwych opcji.

Nie sposób pominąć tego, że rozważania teoretyczne nad wyceną derywatów mogą obejmować znacznie szersze spektrum procesów opisujących fluktuacje kursów rynkowych instrumentów podstawowych. Należy w tym miejscu zwrócić szczególną uwagę na modele:

[*] dr Arkadiusz Orzechowski, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa, e-mail: aorzec@sgh.waw.pl.

– skokowo-dyfuzyjne R.C. Mertona (1976), S. Kou'a (2002), w przypadku których wzrosty i spadki notowań aktywów, od których uzależniona jest wycena kontraktów dających prawo do kupna lub sprzedaży akcji, obligacji, itd. mogą być połączeniem zmian o charakterze ciągłym i dyskretnym,
– czysto skokowe D.B. Madana, P. Carra i E. Changa (1998) oraz D.B. Madana i D. Milne (1991), O.E. Barndorffa-Nielsena (1995) i T.H. Rydberga (1997) czy P. Carra, H. Gemana, D.B. Madana i M. Yora (2002), które zakładają dyskretne zmiany kursów rynkowych walorów stanowiących podstawę wystawienia kontraktów bazujących na prawach pochodnych,
– stochastycznej zmienności S. Hestona (1993), D.S. Batesa (1996) czy E.M. Steina i J.C. Steina (1991), skonstruowanych w oparciu o założenie stanowiące, iż zmienność instrumentu będącego podstawą wystawienia opcji podlega pewnemu procesowi losowemu.

Nie można również zapominać o tym, że analityczna wycena analizowanych kontraktów nie jest możliwa we wszystkich wyżej wymienionych podejściach. Stwierdzenie to pozostaje prawdziwe w szczególności w odniesieniu do wykładniczych modeli Lévy'ego oraz modeli stochastycznej zmienności, w przypadku których konieczne wydaje się zastosowanie alternatywnych sposobów generowania wartości teoretycznych derywatów. Jedna z takich koncepcji sprowadza się do wyznaczenia transformaty Fouriera, a następnie jej numerycznego odwrócenia. Podejście takie po raz pierwszy zostało zaproponowane przez E.M. Steina i J.C. Steina (1991) w odniesieniu do modelu stochastycznej zmienności.

Celem niniejszego artykułu jest wycena symetrycznych opcji potęgowych przy wykorzystaniu autorskiego schematu transformaty Fouriera oraz porównanie opracowanej metody pod względem szybkości i dokładności obliczeniowej z alternatywnymi koncepcjami wykorzystywanymi do określania wartości teoretycznych kontraktów bazujących na prawach pochodnych.

Na początku artykułu analizie poddano formuły pozwalające określić ceny sprawiedliwe opcji potęgowych w modelu F. Blacka i M. Scholesa ze szczególnym uwzględnieniem kontraktów o symetrycznym profilu wypłaty. Następnie, rozpoznane sposoby określania wartości teoretycznych rozpatrywanych instrumentów finansowych poszerzono o koncepcje J. Zhu (2000) oraz autorską (bazującą na transformacie Fouriera). Ostatecznie, sprawdzono zgodność nowego modelu wyceny opcji z podejściami F. Blacka i M. Scholesa oraz tym wykorzystującym transformatę Fouriera, a także wyznaczono szybkość obliczeniową w ramach każdego z zaproponowanych podejść.

1. Wycena symetrycznych opcji potęgowych za pomocą modelu F. Blacka i M. Scholesa

Wycena symetrycznych opcji potęgowych może być dokonana przy istnieniu różnych zestawów uproszczeń dotyczących mechanizmu generowania zmian kursów aktywów bazowych. A. Esser (2004) i P.G. Zhang (1998) wyprowadzają formuły analityczne pozwalające wyznaczyć ceny opcji lewarowanych odpowiadające założeniom modelu F. Blacka i M. Scholesa. S.N.I. Ibrahim, J.G. O'Hara i M.S.M. Zaki (2016) koncentrują się na określeniu wartości rozpatrywanych kontraktów dopuszczając możliwość występowania skoków notowań w przypadku instrumentów podstawowych, zaś S.N.I. Ibrahim, J.G. O'Hara i N. Constantinnou (2013) oraz J. Kim, B. Kim, K.S. Moon i I.S. Wee (2012) dokonują wyceny opcji potęgowych w modelu stochastycznej zmienności S. Hestona.

W niniejszym artykule przedmiotem rozważań są symetryczne opcje potęgowe w warunkach stałości wariancji w czasie oraz braku nieciągłości notowań instrumentów podstawowych. Warto zauważyć, iż przy tak określonych założeniach łatwo jest dokonać implementacji transformaty Fouriera. Jednocześnie prezentowane podejście może być w stosunkowo prosty sposób wykorzystane do wyznaczenia wartości teoretycznych kontraktów bazujących na prawach pochodnych w innych modelach wyceny, w tym w szczególności w modelach stochastycznej zmienności.

W najbardziej ogólnym podziale opcje potęgowe można podzielić na symetryczne i asymetryczne. Cena teoretyczna pierwszego rodzaju derywatów (jeśli są one „in-the-money") określana jest przez zdyskontowaną wartość oczekiwaną[1] różnicy między ceną aktywa bazowego w momencie wygaśnięcia kontraktu a poziomem jego rozliczenia, która to różnica podnoszona jest następnie do pewnej skończonej potęgi n[2]. Przedstawiono to za pomocą wzoru:

$$C\left(S_0, 0\right) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}\left(\left(\left(S_T - K\right)^n, 0\right)^+ \middle| \Omega_0\right) \tag{1}$$

gdzie: S_0 i S_T to ceny rynkowe aktywa bazowego odpowiednio w momentach wystawienia i wygaśnięcia opcji, r jest stałą stopą procentową, e to stała Napera, $E^{\mathbb{Q}}$ jest operatorem wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej $\mathbb{Q}$, n to potęga, T to moment wygaśnięcia opcji, zaś Ω_0 jest filtracją utożsamianą z przeszłymi notowaniami aktywa bazowego.

Cenę modelową asymetrycznych opcji potęgowych można zdefiniować w taki sam sposób, co opcji symetrycznych, jednak z zastrzeżeniem, że do dowolnej skończonej potęgi podnoszona jest nie różnica pomiędzy ceną instrumentu podstawowego w momencie wygaśnięcia kontraktu a poziomem jego rozliczenia, tylko obie wielkości oddzielnie. Oznacza to, że prawdziwą pozostaje następująca formuła:

$$C\left(S_0, 0\right) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^n - K^n, 0\right)^+ \middle| \Omega_0\right) \tag{2}$$

Kontynuując rozważania na temat symetrycznych opcji potęgowych warto przyjąć założenie, że $n \in \mathbb{C}$ i $n \geq 1$. Umożliwia to zapisanie wzoru (1) w następującej postaci:

[1] Liczoną względem pewnej miary martyngałowej.

$$C(S_0,0)=e^{-rT}E^{\mathbb{Q}}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}S_T^{n-i}K^i,0\right)^+\Big|\Omega_0\right) \tag{3}$$

gdzie i jest wielkością, względem której następuje sumowanie.

Dokonanie zamiany miar martyngałowych (Dufrense i in., 1996) oraz zastosowanie lematu Itô dla funkcji opisującej cenę aktywa bazowego podniesioną do potęgi $n – i$ pozwala wyznaczyć wzór opisujący cenę teoretyczną symetrycznych opcji potęgowych (metoda oznaczana dalej jako BS), tj.

$$C(S_0,0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}K^iS_0^{n-i}e^{(n-i-1)rT+(n-i)[(n-i)-1]\frac{1}{2}\sigma^2T}\mathcal{N}\left(d+(n-i)\sigma\sqrt{T}\right) \tag{4}$$

gdzie: σ jest odchyleniem standardowym ceny instrumentu bazowego, zaś $\mathcal{N}(.)$ to dystrybuanta wystandaryzowanego rozkładu normalnego z parametrem d zdefiniowanym przy pomocy następującej formuły:

$$d=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5}$$

Warto zauważyć za P.G. Zhangiem (1998, s. 597–598), że zastosowanie tej samej procedury w odniesieniu do drugiego rodzaju opcji potęgowych umożliwia wycenę kontraktów asymetrycznych przy wykorzystaniu poniższych wzorów:

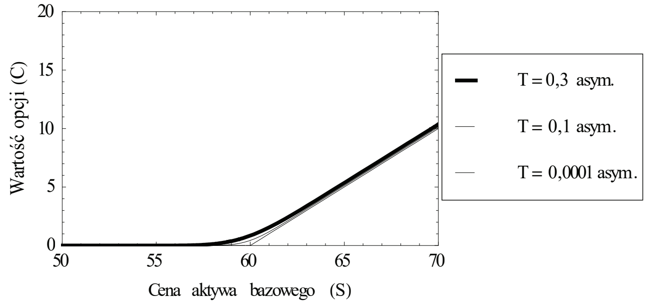
$$C(S_0,0)=S_0^ne^{(n-1)rT+(n^2-n)\frac{1}{2}\sigma^2T}\mathcal{N}(d_1)-K^ne^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \tag{6}$$

gdzie:

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+n\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{7}$$

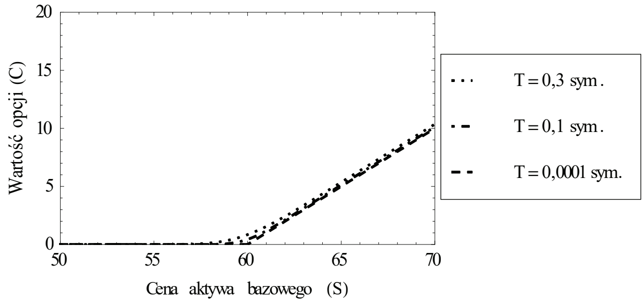
$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{8}$$

Formuły (4–8) mogą być wykorzystane do wyznaczenia funkcji wypłat asymetrycznych i symetrycznych potęgowych opcji kupna typu europejskiego. Rysunki 1–6 są przygotowane przy założeniu, że ceny aktywa bazowego znajdują się w przedziale od 50 do 70, poziom rozliczenia kontraktów wynosi 60, stopa procentowa wolna od ryzyka kształtuje się na poziomie 2%, odchylenie standardowe stopy zwrotu z instrumentu podstawowego przyjmuje wartość 5%, zaś n waha się pomiędzy 1 i 3.



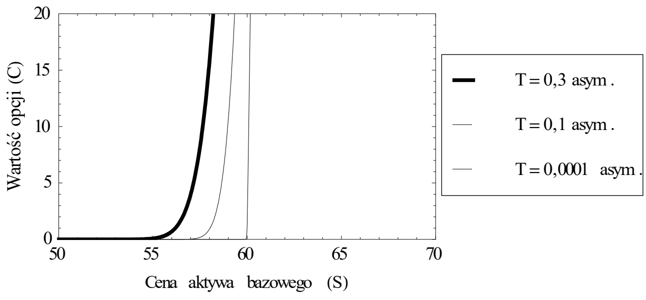
Rysunek 1. Funkcje wypłat asymetrycznych opcji potęgowych przy $n = 1$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



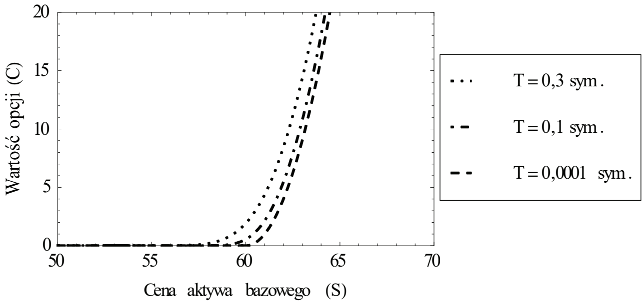
Rysunek 2. Funkcje wypłat symetrycznych opcji potęgowych przy $n = 1$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



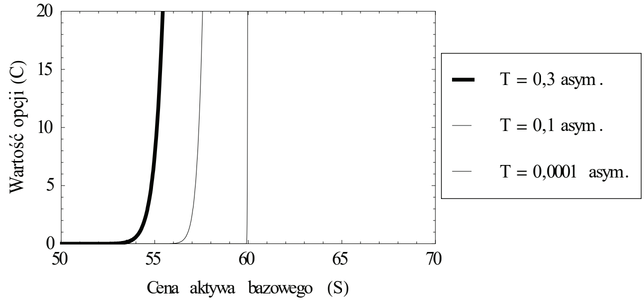
Rysunek 3. Funkcje wypłat asymetrycznych symetrycznych opcji potęgowych przy $n = 2$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



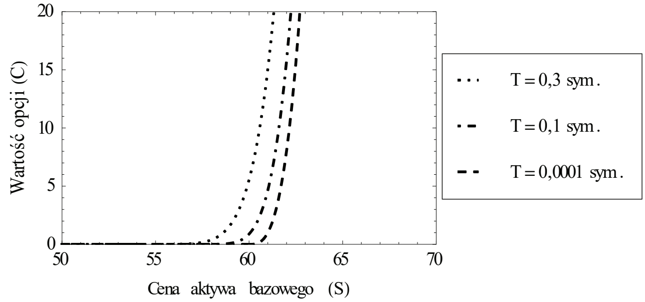
Rysunek 4. Funkcje wypłat symetrycznych opcji potęgowych przy $n = 2$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5. Funkcje wypłat asymetrycznych opcji potęgowych przy $n = 3$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6. Funkcje wypłat symetrycznych opcji potęgowych przy $n = 3$ dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.

W oparciu o wygenerowane rysunki można sformułować trzy wnioski. Pierwszy z nich stanowi, iż w sytuacji, gdy $n = 1$, funkcje wypłat asymetrycznych i symetrycznych opcji potęgowych są identyczne z funkcjami wypłat kontraktów waniliowych bazujących na prawach pochodnych. Zgodnie z drugim wnioskiem można stwierdzić, iż w miarę podnoszenia potęgi n oba rodzaje analizowanych instrumentów pochodnych dają możliwość osiągnięcia anormalnych stóp zwrotu. Trzeci wniosek dotyczy natomiast dźwigni finansowej, która dla $n > 1$ jest wyższa w przypadku asymetrycznych niż symetrycznych opcji potęgowych. Stwarza to możliwość osiągnięcia ponadprzeciętnych korzyści z inwestycji w tego rodzaju kontrakty.

2. Wycena symetrycznych opcji potęgowych za pomocą transformaty Fouriera

Najbardziej oczywisty sposób wyceny opcji za pomocą transformaty Fouriera, który może być bezpośrednio zastosowany do symetrycznych kontraktów potęgowych, opisuje m.in. J. Zhu (2000). Aplikując zaproponowane przez niego podejście do określania wartości modelowych kontraktów lewarowanych, należy najpierw wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej o rozkładzie normalnym $N\left(\ln\left(S_0\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\left(n-i\right)\sigma^2 T,\sigma\sqrt{T}\right)$, która przyjmuje następującą postać:

$$\phi\left(\xi\right)=e^{\mathbb{I}\xi\left(\ln\left(S_0\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\left(n-i\right)\sigma^2 T\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 T} \tag{9}$$

gdzie: $\mathbb{I}$ to część urojona liczby zespolonej, ξ to stała, zaś wszystkie inne wielkości pozostają takie same jak zdefiniowane wcześniej.

Następnie, w ramach analizowanej procedury, dla $\phi(\xi)$ wyznaczana jest odwrotna transformata Fouriera, zgodnie ze schematem:

$$F=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left[\frac{e^{-\mathbb{I}\xi\ln\left(K\right)}\phi\left(\xi\right)}{\mathbb{I}\xi}\right]d\xi \tag{10}$$

gdzie $\Re\left[.\right]$ to część rzeczywista funkcji podcałkowej.

Ostatecznie cenę teoretyczną symetrycznych opcji potęgowych w modelu F. Blacka i M. Scholesa można otrzymać przy wykorzystaniu następującego wzoru (metoda oznaczana dalej jako BS-FT1):

$$C\left(S_0,0\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i\binom{n}{i}K^i S_0^{n-i}e^{\left(n-i-1\right)rT+\left(n-i\right)\left[\left(n-i\right)-1\right]\frac{1}{2}\sigma^2 T}F \tag{11}$$

Istnieje wiele sposobów wyceny opcji za pomocą transformaty Fouriera. Rozpoznane podejścia można klasyfikować według różnych kryteriów, jednak największy sens wydaje się mieć koncepcja, w której pod uwagę bierze się ilość odwrotnych transformat Fouriera, jakie trzeba wyznaczyć, aby otrzymać cenę teoretyczną kontraktów bazujących na prawach pochodnych (im mniej, tym lepiej) oraz to, czy w mianowniku funkcji podcałkowej formuły na wycenę rozpatrywanych instrumentów finansowych znajduje się ξ podniesiona do kwadratu. Spełnienie tych dwóch warunków stwarza szansę z jednej strony na dużą szybkość obliczeniową, z drugiej zaś daje możliwość wygenerowania dokładnych wyników końcowych.

Kierując się pierwszym kryterium, do najlepszych modeli należy zaliczyć te opracowane m.in. przez P. Carra i D. Madana (1999) , D.S. Batesa (2006), A. Liptona (2002) oraz A. Lewisa (2001), do jednoznacznie gorszych natomiast ten autorstwa G. Bakshi i D. Madana (2000). Uwzględniając natomiast drugie kryterium, przewagę nad pozostałymi mają podejścia P. Carra i D. Madana (1999), D.S. Batesa (2006), A. Lewisa (2001) oraz A. Liptona (2002).

Warto w tym momencie zauważyć, że lista możliwych do zaproponowania schematów wyznaczania transformaty Fouriera, które mogą być wykorzystane do wyceny opcji, nie jest zamknięta (Orzechowski, 2016).

Nie sposób również pominąć tego, że w przypadku symetrycznych kontraktów lewarowanych zarówno ilość wyznaczanych transformat Fouriera, a w konsekwencji również liczba procedur ich numerycznego odwrócenia, jak i potęgi, do której podnoszony jest parametr ξ, mają mniejsze znaczenie niż w przypadku innych derywatów. Wynika to pośrednio z tego, że w formule (4), w odróżnieniu np. od wzoru (6), występuje tylko jedna dystrybuanta. Nie oznacza to jednak, że możliwe do rozpoznania modele należy oceniać jednakowo.

W dalszej części artykułu rozważania ograniczają się do analizy podejścia, które jest najbardziej zbliżone do koncepcji autorskiej. Zakłada ono, iż na początku konieczna jest zamiana zmiennych zgodnie ze schematem: $\ln S_T = s_T$ oraz $\ln K = k$. Pozwala to przekształcić wzór (3) do następującej postaci:

$$C\left(S_0, 0\right) = e^{-rT} \int_k^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^i \binom{n}{i} e^{s_T(n-i)} e^{ki} \mathbb{Q}\left(s_T \middle| \Omega_0\right) ds_T \tag{12}$$

gdzie $\mathbb{Q}\left(s_T \middle| \Omega_0\right)$ jest funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej s_T przy filtracji Ω_0.

Następnie wyznaczana jest transformata Fouriera dla zmodyfikowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej s_T, tj. $e^{s_T(n-i)} \mathbb{Q}\left(s_T \middle| \Omega_0\right)$:

$$FT\left(\xi\right) = \frac{\phi\left(\xi - \left(n-i\right)\mathbb{I}\right)}{\mathbb{I}\xi} \tag{13}$$

Trzeba mieć na uwadze, że $\int_{-\infty}^{\infty} e^{s_T(n-i)} \mathbb{Q}\left(s_T \middle| \Omega_0\right)$ może być traktowana jako wartość oczekiwana zmiennej S_T^{n-i}, tj.:

$$E\left(S_T^{n-i}\right) = S_0^{n-i} e^{(n-i)rT - (n-i)(n-i-1)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \tag{14}$$

oraz jako funkcja charakterystyczna $\phi\left(-(n-i)\mathbb{I}\right)$, tj.:

$$\phi\left(-(n-i)\mathbb{I}\right) = S_0^{n-i} e^{(n-i)rT - (n-i)(n-i-1)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \tag{15}$$

W konsekwencji formułę (13) można przekształcić do następującej postaci:

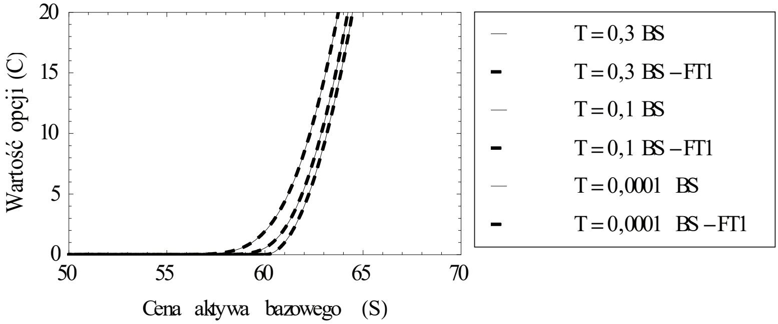
$$FT(\xi) = \frac{\phi\left(\xi - (n-i)\mathbb{I}\right) S_0^{n-i} e^{(n-i)rT - (n-i)(n-i-1)\frac{1}{2}\sigma^2 T}}{\mathbb{I}\xi\phi\left(-(n-i)\mathbb{I}\right)} \tag{16}$$

Ostatecznie, obliczając odwrotną transformatę Fouriera, można wyznaczyć cenę teoretyczną symetrycznych opcji potęgowych w modelu F. Blacka i M. Scholesa zgodnie z poniższym wzorem (metoda oznaczana dalej jako BS-FT2):

$$\begin{gathered} C(S_0, 0) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} K^i S_0^{n-i} e^{(n-i-1)rT + (n-i)[(n-i)-1]\frac{1}{2}\sigma^2 T} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi S_0^{n-i} e^{(n-i)rT + (n-i)[(n-i)-1]\frac{1}{2}\sigma^2 T}} \int_0^{\infty} \Re\left[\frac{e^{-\mathbb{I}\xi k} \phi\left(\xi - (n-i)\mathbb{I}\right)}{\mathbb{I}\xi} \right] d\xi \right) \end{gathered} \tag{17}$$

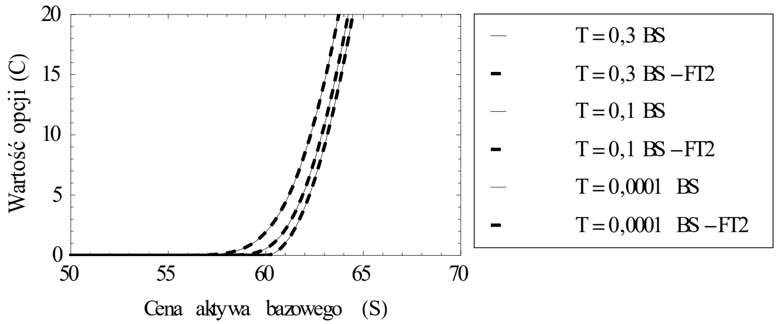
Łatwo zauważyć, iż określenie wartości modelowych instrumentów symetrycznych bazujących się na prawach pochodnych wymaga policzenia tylko jednej transformaty Fouriera oraz jednokrotnego jej numerycznego odwrócenia. Jest to korzystne z punktu widzenia szybkości obliczeniowej. Nie można jednak pominąć tego, że w mianowniku funkcji podcałkowej we wzorze (17) parametr ξ nie jest podniesiony do kwadratu, co wywiera niekorzystny wpływ na czas generowania wyniku końcowego.

Dysponując wzorami (4), (11) i (17) można przystąpić do zbadania, czy zaprezentowane sposoby wyceny symetrycznych opcji potęgowych są ze sobą zgodne. W tym celu sprawdzana jest zbieżność funkcji wypłat modeli BS-FT1 i BS-FT2 z podejściem BS. Rysunki 7 i 8 są opracowane przy takich samych założeniach co rysunki 1–6. Oznacza to, że ceny aktywa bazowego brane są z przedziału od 50 do 70, poziom rozliczenia kontraktów wynosi 60, stopa wolna od ryzyka przyjmuje wartość 2%, a odchylenie standardowe rentowności aktywa bazowego wynosi 5%. Jedyną kategorią, która ulega zmianie jest potęga – w jej przypadku brana jest pod uwagę wyłącznie wielkość $n = 2$.



Rysunek 7. Funkcje wypłat symetrycznych opcji potęgowych w modelach BS i BS-FT1 przy n = 2 dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 8. Funkcje wypłat symetrycznych opcji potęgowych w modelach BS i BS-FT2 przy n = 2 dla różnych okresów pozostających do wygaśnięcia kontraktów

Źródło: opracowanie własne.

Biorąc pod uwagę przebieg funkcji wypłat symetrycznych opcji potęgowych w rozpatrywanych modelach należy stwierdzić, iż uwzględnione sposoby wyceny kontraktów lewarowanych oparte na transformacie Fouriera (w tym model nowo skonstruowany, tj. BS-FT2) są zgodne z podejściem BS.

3. Szybkość obliczeniowa wyceny symetrycznych opcji potęgowych

W celu sprawdzenia szybkości obliczeniowej wyceny symetrycznych opcji potęgowych wykorzystano pakiet Mathematica 8.0, który był uruchamiany na komputerze z procesorem Intel i5-4210U CPU @ 1,70 GH, posiadającym pamięć RAM 6 GB. Dane wejściowe są zgodne z tymi, które zostały wcześniej wykorzystane do wyznaczenia funkcji wypłat rozpatrywanych kontraktów. Wyniki otrzymane dla różnych cen instrumentów bazowych zawarto w tabelach 1 i 2.

Tabela 1

Szybkość generowania cen teoretycznych symetrycznych opcji potęgowych w sekundach przy t = 0,1 i 0.3

	OTM (S_T = 55)	ATM (S_T = 60)	ITM (S_T = 65)
BS	0	0	0
BS-FT1	0,016	0,016	0,016
BS-FT2	0,016	0,016	0,015

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2

Szybkość generowania cen teoretycznych symetrycznych opcji potęgowych w sekundach przy t = 0,0001

	OTM (S_T = 55)	ATM (S_T = 60)	ITM (S_T = 65)
BS	0	0	0
BS-FT1	0,032	0,016	0,016
BS-FT2	0,031	0,016	0,016

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie dokonanej analizy można stwierdzić, że metoda BS pozwala najszybciej wygenerować ceny modelowe symetrycznych opcji potęgowych. Podejścia zakładające konieczność wyznaczania funkcji charakterystycznych są wolniejsze od koncepcji BS i zbliżone do siebie pod względem szybkości obliczeniowej. Taki rezultat wydaje się być zgodny z oczekiwaniami, gdyż metody BS-FT1 i BS-FT2, w odróżnieniu od BS, bazują na schematach numerycznych (odwrotna transformata Fouriera w ich przypadku obliczana jest przy wykorzystaniu procedury numerycznego całkowania). Warto przy tym zwrócić uwagę, że podejść BS-FT1 i BS-FT2 nie można z tego powodu traktować jako gorszych. W przypadku bowiem np. modeli stochastycznej zmienności nie ma możliwości zastosowania metod analitycznych, w tym metody BS. W konsekwencji najszybszy sposób generowania cen teoretycznych opcji z uwzględnionych powyżej nie jest możliwy do wykorzystania.

Uwagi końcowe

Symetryczne opcje potęgowe są instrumentami finansowymi, które w bardziej elastyczny sposób pozwalają zarządzać ryzykiem zmian cen aktywów bazowych. Stwierdzenie takie znajduje potwierdzenie w spostrzeżeniu, zgodnie z którym opcje waniliowe są jedynie szczególnym przypadkiem kontraktów lewarowanych, zarówno symetrycznych, jak i asymetrycznych.

Wynikający stąd duży uniwersalizm i potencjalna możliwość szerokiego zastosowania tego typu derywatów wywołują potrzebę dokładnego poznania sposobu ich wyceny. Jeden z modeli, który jest w tym celu proponowany (BS-FT2), został poddawany analizie. Polega on na wyznaczeniu transformaty Fouriera zmodyfikowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa ceny aktywa podstawowego, a następnie na numerycznym odwróceniu otrzymanej wielkości. Tego typu podejście stwarza okazję do określenia wartości teoretycznych rozpatrywanych kontraktów nie tylko przy założeniu słuszności uproszczeń sformułowanych przez F. Blacka i M. Scholesa, ale również w modelach skokowo-dyfuzyjnych, czysto skokowych i stochastycznej zmienności.

Niniejszy artykuł rozszerza zestaw modeli wyceny instrumentów pochodnych o nowe podejście, które może być z powodzeniem stosowane do wyceny symetrycznych opcji potęgowych, jak również innych kontraktów bazujących na prawach pochodnych. Ponadto, zaproponowany sposób określania wartości modelowych opcji lewarowanych (BS-FT2) jest tak samo dobry pod względem zarówno dokładności, jak i szybkości obliczeniowej, co koncepcja J. Zhu. Stwierdzenie takie, o ile zasadne w przypadku modelu F. Blacka i M. Scholesa, nie musi być prawdziwe w przypadku innych modeli wyceny opcji, np. modeli stochastycznej zmienności. Stwarza to możliwość dalszych badań nad wykorzystaniem koncepcji BS-FT2 do wyceny opcji.

Literatura

Bachelier, L. (1900). Théorie de la speculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, *3* (17), 21–86.

Bakshi, G., Madan, D. (2000). Spanning and derivative – security valuation. *Journal of Financial Economics*, *2* (55), 205–238.

Barndorff-Nielsen, O.E. (1991). Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, *1* (24), 1–13.

Barndorff-Nielsen, O.E. (1995). Normal inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns. *Research Report*, 300. Aarhus University: Department Theoretical Statistics.

Barndorff-Nielsen, O.E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance Stochastics*, *1* (2), 41–68.

Bates, D.S. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, *1* (9), 69–107.

Bates, D.S. (2006). Maximum likelihood estimation of latent affine processes. *Review of Financial Studies*, *3* (19), 909–965.

Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, *3* (81), 637–654.

Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., Yor M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, -2 (75), 305–332.

Carr, P., Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, *2* (4), 61–73.

Dufrense, P.C., Keirstead, W., Ross, M.P. (1996). Pricing derivatives the martingale way. Pobrano z: http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rpf279.pdf (8.12.2017).

Esser, A. (2004). Pricing in (in)complete markets: Structural analysis and applications. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, *537*. DOI: 10.1007/978-3-642–17065-2.

Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, *2* (6), 327–343.

Ibrahim, S.N.I., O'Hara, J.G., Constantinou, N. (2013). Pricing power options under the Heston dynamics using the FFT. *New Trends in Mathematical Sciences*, *1* (1), 1–9.

Ibrahim, S.N.I., O'Hara, J.G., Zaki, M.S.M. (2016). Pricing formula for power options with jump-diffusion. *Applied Mathematics & Information Sciences. An International Journal*, *4* (10), 1313–1317.

Kim, J., Kim, B., Moon, K. S., Wee, I. S. (2012). Valuation of power options under Heston's stochastic volatility model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36 (11), 1796–1813.

Kou, S. (2002). Jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, *8* (48), 1086–1101.

Lewis, A. (2001). A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Levy processes. *SSRN Electronic Journal*, 1–25.

Lipton, A. (2002). The Vol Smile Problem. Pobrano z: http://www.math.ku.dk/~rolf/Lipton_VolSmileProblem.pdf (8.12.2017).

Madan, D., Carr, P., Chang, E. (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, *1* (2), 79–105.

Madan, D.B., Milne, F. (1991). Option pricing with VG martingale components. *Mathematical Finance*, *1* (4), 39–55.

Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, *1–2* (3), 125–144.

Orzechowski, A. (2016). Analiza efektywności obliczeniowej opcji na przykładzie modelu F. Blacka i M. Scholesa. *Finanse*, *1* (9), 137–154.

Rydberg, T.H. (1997). The normal inverse Gaussian Levy Process: Simulation and approximation. *Communication in Statistics Stochastic Models*, *4* (13), 887–910.

Stein, E.M., Stein, J.C. (1991). Stock price distribution with stochastic volatility: An analytic approach. *The Review of Financial Studies*, *4* (4), 727–752.

Zhang, P.G. (1998). *Exotic options. A guide to second generation options*. Singapore: World Scientific Publishing.

Zhu, J. (2000). Modular pricing of options: An application of Fourier analysis. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 493. DOI: 10.1007/978-3-662-04309-7.

PRICING SYMMETRIC POWER OPTIONS – PROPOSITION OF A NEW METHOD BASED ON THE FOURIER TRANSFORM

Abstract: The purpose of this article is to present a new way of valuing symmetric power options and to compare it with alternative concepts that can be used to determine the theoretical values of the contracts, i.e. martingale and J. Zhu methods. The methodology of the conducted research is based on comparing the accuracy and computational speed of every approach to pricing symmetric power options. The obtained results allow to conclude that the use of Fourier transforms for the valuation of options slows down the valuation process in relation to the martingale approach. However, due to the universality of approaches based on the Fourier transform (the possibility of their use to determine the value of options under the conditions of randomness of underlying assets' prices), they can not be considered unambiguously worse. The greatest value of the submitted paper is a possibility of applying the author's method of pricing symmetric power options and analysis of its speed and computational accuracy.

Keywords: symmetric power options, Fourier transform, Black-Scholes model

Cytowanie

Orzechowski, A. (2018). Symetryczne opcje potęgowe – propozycja nowej koncepcji wyceny za pomocą transformaty Fouriera. *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, *1* (91), 501–513. DOI: 10.18276/frfu.2018.91-40.