

## Wycena opcji parabolicznych przy wykorzystaniu transformaty Fouriera

Arkadiusz Orzechowski\*

**Streszczenie:** *Cel* – Analiza porównawcza alternatywnych sposobów wyceny, które mogą być wykorzystywane do określania wartości modelowych opcji parabolicznych.

*Metodologia badania* – Sprawdzenie dokładności i szybkości obliczeniowej metod BS, BS-FT1 i BS-FT2 z uwzględnieniem schematów numerycznych, które mogą być wykorzystane w procesie obliczeniowym.

*Wynik* – W warunkach słuszności założeń modelu F. Blacka i M. Scholesa trudno jest wykazać zasadność posługiwania się modelami BS-FT1 i BS-FT2. Ze względu jednak na ich uniwersalizm i elastyczność koncepcje te powinny być rozwijane.

*Oryginalność* – Nowy sposób wyceny opcji oparty na transformacie Fouriera może być wykorzystywany do wyceny różnych rodzajów instrumentów opartych na prawach pochodnych w różnych modelach wyceny opcji.

**Słowa kluczowe:** opcje paraboliczne, transformaty Fouriera, model Blacka-Scholesa

### Wprowadzenie

Opcje paraboliczne są pochodnymi instrumentami finansowymi, których profil wypłaty jest zmodyfikowany w stosunku do opcji waniliowych poprzez podniesienie do drugiej potęgi różnicy między ceną aktywa bazowego a ceną rozliczenia. Ze względu na to, że określenie wartości teoretycznych analizowanego rodzaju kontraktów może być dokonane na wiele sposobów, warto zastanowić się, który z nich jest najlepszy. Na szczególną uwagę zasługuje to, że przeprowadzana w tym celu analiza musi mieć charakter wieloaspektowy. Po pierwsze, trzeba rozstrzygnąć, czy porównywane metody wyceny są analityczne, np. metoda martyngałowa (Harrison, Krebs, 1979) i polegająca na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu (Black, Scholes, 1973), czy numeryczny, np. metody bazujące na transformacie Fouriera (Schmelzle, 2010), różnic skończonych (Brandimarte, 2006), *Monte Carlo* (Brandimarte, 2014). Po drugie, dokładnego ustalenia wymaga kwestia założeń, które muszą być spełnione, aby można było określić wartość modelową opcji, np. modele dyfuzyjne (Black, Scholes, 1973), skokowo-dyfuzyjne (Kou, 2002; Merton, 1976), czysto skokowe (Madan, Carr, Chang 1998; Madan, Milne, 1991; Barndorff-Nielsen, 1995; Rydberg, 1997; Carr, Geman, Madan, 2002), stochastycznej zmienności

---

\* dr Arkadiusz Orzechowski, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa, e-mail: aorzec@sgh.waw.pl.

(Heston, 1993). Po trzecie, w przypadku niektórych metod wyceny konieczne wydaje się doprecyzowanie, jaka technika obliczeniowa jest stosowana w ramach wykorzystywanej metody wyceny, np. w przypadku numerycznego całkowania trzeba określić, czy obliczenia wykonywane są zgodnie ze schematem: trapezów, metody Newtona, Gaussa-Kronroda itd.

Celem niniejszego artykułu jest porównanie szybkości oraz dokładności obliczeniowej wyceny opcji parabolicznych w warunkach słuszności założeń modelu Blacka i Scholesa (1973). W tym celu wykorzystywana jest koncepcja bazująca na transformacie Fouriera.

Na początku artykułu prezentowany jest sposób wyceny opcji parabolicznych za pomocą podejścia martyngałowego zaimplementowanego z wyceny symetrycznych i asymetrycznych opcji potęgowych. Następnie wartość teoretyczna będących przedmiotem zainteresowania kontraktów jest określana przy wykorzystaniu dwóch konkurencyjnych podejść: pierwszej autorstwa J. Zhu (2000) oraz drugiej, autorskiej. Ostatecznie analizie poddawana jest szybkość i dokładność obliczeniowa każdego z uwzględnionych sposobów generowania wartości teoretycznych kontraktów, których profil wypłaty ma charakter paraboliczny.

## 1. Wycena opcji parabolicznych za pomocą metody martyngałowej

Opcje paraboliczne można wycenić na wiele sposobów. W tym celu wykorzystuje się zwykle lewarowane instrumenty finansowe bazujące na prawach pochodnych, które posiadają symetryczne lub asymetryczne profile wypłat. Jak zauważa A. Esser (2004), w pierwszym przypadku analizowane derywaty określane są mianem *powered options*, w drugim zaś *power options*. Ze względu na występowanie dźwigni (tym większej, im potęga zmieniająca profil wypłaty kontraktów jest wyższa), ważne jest określenie skali osiągniętych zysków lub strat w stosunku do opcji nieegzotycznych o identycznej charakterystyce.

Warto zauważyć, że opcje potęgowe, bez względu na to, jaki ich rodzaj jest rozpatrywany, mogą generować zarówno korzyści większe, jak i mniejsze od opcji waniliowych. W przypadku podmiotu zajmującego pozycję *long call*, ponadprzeciętne zyski możliwe są do osiągnięcia w sytuacji, gdy potęga uwzględniona w profilu wypłaty opcji jest wyższa od jedności. Gdy przyjmuje ona wartości z przedziału (0, 1), tego typu strategia nie stwarza okazji osiągnięcia zysków przekraczających poziom wynikający z kupna opcji kupna typu *plain vanilla* o takich samych parametrach<sup>1</sup>. Porównanie czterech podstawowych strategii dla opcji waniliowych i potęgowych w warunkach zerowej premii opcyjnej zawarto w tabeli 1.

---

<sup>1</sup> Z analizy eliminowane są opcje potęgowe o ujemnych potęgach.

**Tabela 1**

Porównanie możliwych zysków i strat w przypadku opcji potęgowych (w stosunku do opcji waniliowych o takich samych parametrach) w warunkach zerowej premii opcyjnej

	Wysokość potęgi	Zyski z pozycji <i>long call</i>	Straty z pozycji <i>short call</i>	Zyski z pozycji <i>long put</i>	Straty z pozycji <i>short put</i>
Opcje potęgowe symetryczne	(0, 1) >1	mniejsze większe	mniejsze większe	mniejsze większe	mniejsze większe
Opcje potęgowe asymetryczne	(0, 1) >1	mniejsze większe	mniejsze większe	mniejsze większe	mniejsze większe

Źródło: opracowanie własne.

O ile porównanie skali korzyści lub strat wynikających z kupna lub sprzedaży opcji jest zwykle istotne na wstępnym etapie budowania strategii inwestycyjnej, o tyle angażowanie posiadanych zasobów w praktyce wymaga umiejętności wyceny rozpatrywanych kontraktów. Ograniczając dalszą analizę wyłącznie do lewarowanych instrumentów finansowych o charakterze parabolicznym można stwierdzić, że podstawowy sposób ich wyceny, podobnie jak w przypadku symetrycznych i asymetrycznych opcji potęgowych, opiera się na metodzie martyngałowej. Zgodnie z nią cena sprawiedliwa opcji parabolicznych równa się wartości oczekiwanej (obliczanej względem pewnej miary martyngałowej) strumienia płatności określonego przez podniesioną do kwadratu różnicę między ceną rynkową instrumentu bazowego a poziomem rozliczenia kontraktów. Można to zapisać przy pomocy następującego wzoru:

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} E^Q(((S_T - K)^2, 0)^+ | \Omega_0) \tag{1}$$

gdzie:  $S_0$  i  $S_T$  są cenami rynkowymi instrumentów bazowych odpowiednio w momentach wystawienia i wygaśnięcia opcji,  $K$  to poziom rozliczenia kontraktu,  $r$  jest stopą procentową wolną od ryzyka,  $e$  to stała Nepera,  $E^Q$  jest operatorem wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej  $Q$ ,  $n$  jest potęgą, do której podnoszona jest wartość strumienia płatności  $S_T - K$ ,  $T$  jest momentem wygaśnięcia opcji, a  $\Omega_0$  utożsamiana jest z filtracją rozumianą jako historia notowań aktywa bazowego.

Zapisując formułę (1) w alternatywny sposób, tj.:

$$C(S_0, 0) = E^Q \left( e^{-rT} S_T^2 \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) - 2KE^Q \left( e^{-rT} S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) + e^{-rT} K^2 E^Q \left( \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) \tag{2}$$

łatwo jest zauważyć, że wycena opcji parabolicznych w ramach metody martyngałowej może być dokonana na dwa sposoby.

Po pierwsze, można w tym celu wykorzystać zmodyfikowaną formułę na wartość teoretyczną asymetrycznych opcji potęgowych, tj.:

$$C(S_0, 0) = E^{\mathbb{Q}} \left( e^{-rT} S_T^2 \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) - e^{-rT} K^2 E^{\mathbb{Q}} \left( \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) - 2K \left( E^{\mathbb{Q}} \left( e^{-rT} S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) - e^{-rT} K E^{\mathbb{Q}} \left( \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right) \right) \quad (3)$$

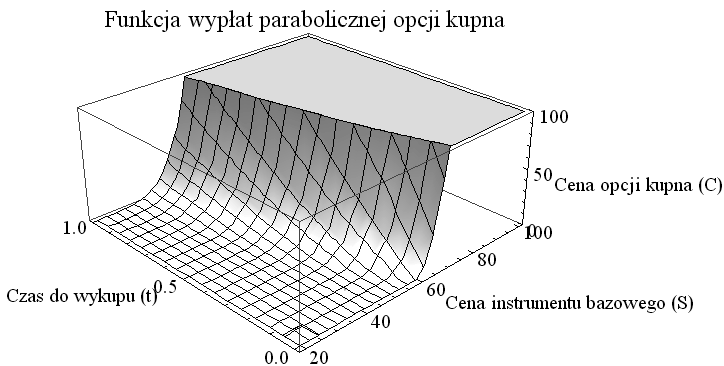
Po drugie, opcje paraboliczne mogą być traktowane jako szczególny przypadek symetrycznych opcji potęgowych (gdy potęga, do której podnoszona jest różnica między cenami aktywa bazowego i rozliczenia, jest równa dwa). Implikuje to słuszność wzorów (1 i 2).

Warto w tym momencie zauważyć, że powyższe rozważania mają charakter wyłącznie teoretyczny. Jak dowodzi bowiem R.C. Heynen i H.M. Kat (1996), na skutek zastosowania pierwszego podejścia generowana jest formuła określająca cenę modelową opcji parabolicznych przy wykorzystaniu trzech różnych dystrybuant. Bezpośrednią konsekwencją wykorzystania drugiego podejścia jest wygenerowanie następującego wzoru (metoda określana dalej jako BS):

$$C(S_0, 0) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} K^i S_0^{2-i} e^{(1-i)rT + (2-i)(1-i)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \mathcal{N}(d + (2-i)\sigma\sqrt{T}) \quad (4)$$

w przypadku którego liczba dystrybuant koniecznych do policzenia nie ulega redukcji i tym samym nie zmniejsza nakładu obliczeniowego.

Rysunek 1, przedstawiający funkcję wypłaty parabolicznej opcji kupna typu europejskiego, jest przygotowany przy założeniu, że ceny aktywa bazowego znajdują się w przedziale od 20 do 100, poziom rozliczenia kontraktów wynosi 60, stopa procentowa wolna od ryzyka kształtuje się na poziomie 4%, a odchylenie standardowe stóp zwrotu z instrumentu podstawowego przyjmuje wartość 29%.



**Rysunek 1.** Funkcja wypłat parabolicznej opcji kupna typu europejskiego.

Źródło: opracowanie własne.

## 2. Wycena opcji parabolicznych przy wykorzystaniu transformaty Fouriera

Istnieje wiele sposobów wyceny opcji, w tym opcji parabolicznych, za pomocą transformaty Fouriera. Na potrzeby niniejszego podrozdziału porównywane są dwa z nich: pierwsze przedstawione m.in. przez J. Zhu (2000) oraz drugie, mające charakter autorski.

Podejście J. Zhu (2000) należy uznać za najbardziej intuicyjne. Wynika to stąd, że wykorzystuje się w nim prostą zależność z rachunku prawdopodobieństwa stanowiącą, że znajomość dystrybuanty zmiennej o rozkładzie normalnym pozwala wyznaczyć funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, a w konsekwencji również parametry rozkładu, któremu ta zmienna podlega. Biorąc pod uwagę, że w formule (4) występuje dystrybuanta zmiennej o rozkładzie normalnym, łatwo można określić parametry rozkładu tej zmiennej a następnie wyznaczyć jej funkcję charakterystyczną, która przybiera następującą postać:

$$\phi(\xi) = e^{\mathbb{I}\xi \left( \ln(S_0) + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + (2-i)\sigma^2 T \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2 T} \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbb{I}$  jest częścią urojoną liczby zespolonej,  $\xi$  jest stałą,  $\sigma$  to odchylenie standardowe stóp zwrotu z instrumentów podstawowych, natomiast wszystkie inne oznaczenia pozostają takie same jak poprzednio.

Dysponując funkcją charakterystyczną  $\phi(\xi)$ , łatwo można wyznaczyć odwrotną transformatę Fouriera. W tym celu wykorzystywany jest poniższy schemat:

$$\mathcal{FT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-\mathbb{I}\xi \ln(K)} \phi(\xi)}{\mathbb{I}\xi} \right] d\xi \quad (6)$$

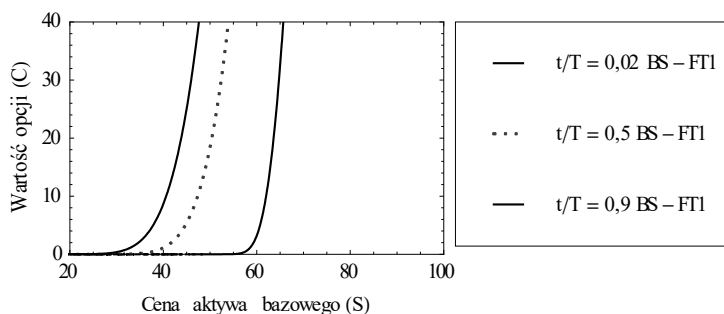
gdzie  $\Re[\cdot]$  to część rzeczywista funkcji podcałkowej.

Uzyskaną w ten sposób wielkość można podstawić w miejsce dystrybuanty do wzoru (4). Warto zauważyć, że wynik końcowy jest otrzymywany przy założeniu słuszności założeń modelu Blacka i Scholesa (1973). W konsekwencji podjętych czynności generowana jest cena teoretyczna parabolicznych opcji potęgowych, która jest zgodna z następującym wzorem (metoda oznaczana dalej jako BS-FT1):

$$C(S_0, 0) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} K^i S_0^{2-i} e^{(1-i)rT + (2-i)(1-i)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-\mathbb{I}\xi \ln(K)} \phi(\xi)}{\mathbb{I}\xi} \right] d\xi \right) \quad (7)$$

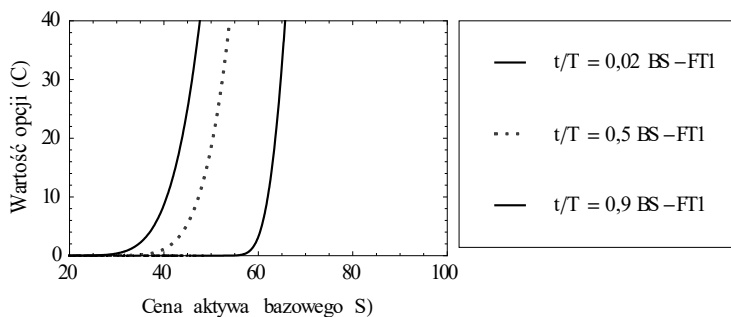
Nie sposób pominąć tego, że otrzymywane w ten sposób ceny opcji parabolicznych typu europejskiego mają charakter przybliżony. Związane jest to z koniecznością wykorzystania procedury numerycznego całkowania we wzorze (7). Mając to na uwadze, istotny wydaje się wybór takiego podejścia, które z jednej strony zapewnia wystarczającą precyzję generowanych wyników, z drugiej zaś jest wystarczająco szybkie.

Na potrzeby niniejszego opracowania do numerycznego całkowania zastosowano metody: trapezów, Newtona-Cotesa i Gaussa-Kronroda. Wszystkie obliczenia są wykonane przy założeniach identycznych jak w przypadku rysunku 1. Oznacza to, że ceny aktywa bazowego brane są z przedziału od 20 do 100, poziom rozliczenia kontraktów wynosi 60, stopa wolna od ryzyka przyjmuje wartość 4%, a odchylenie standardowe rentowności aktywa bazowego kształtuje się na poziomie 29%. Otrzymane wyniki przedstawione są na rysunkach 2–4.



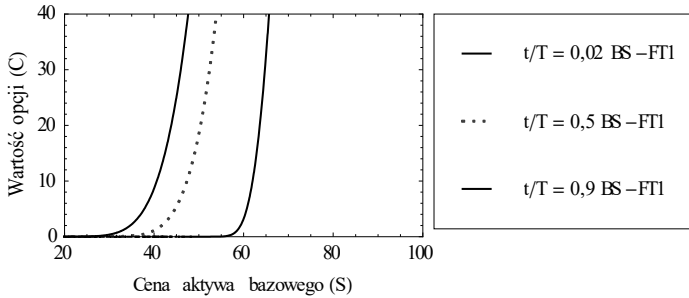
**Rysunek 2.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego trapezów

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 3.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego Newtona-Cotesa

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego Gaussa-Kronroda

Źródło: opracowanie własne.

Analizując rysunki 2–4 łatwo zauważyć, że funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna są w przybliżeniu takie same. W konsekwencji decyzja dotycząca wyboru najlepszej metody wykorzystywanej do numerycznego całkowania i w konsekwencji wyceny będących przedmiotem zainteresowania kontraktów, w dużym stopniu zależy od szybkości generowanych wyników.

Drugi sposób wyceny opcji parabolicznych typu europejskiego, który bazuje na transformacie Fouriera, ma charakter autorski. Wykorzystana w nim procedura jest wieloetapowa. Na początku, wzór (1) przekształcający jest do następującej postaci:

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \int_K^\infty (S_T - K)^2 Q(S_T | \Omega_0) dS_T \tag{8}$$

gdzie  $Q(S_T | \Omega_0)$  jest funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej  $S_T$  przy filtracji  $\Omega_0$ .

Po rozpisaniu kwadratu różnicy i dokonaniu zamiany zmiennych zgodnie ze schematem:  $\ln S_T = s_T$  oraz  $\ln K = k$ , identycznie jak w podejściu G. Bakshi i D. Madana (2000), wyznaczana jest transformata Fouriera następującej całki:  $\int_k^\infty e^{2s_T} Q(s_T | \Omega_0) ds_T$ , tj.

$$\mathcal{FT}_1(\xi) = \frac{E(S_T^2) \phi(\xi - 2\mathbb{I})}{\phi(-2\mathbb{I}) \mathbb{I} \xi} \tag{9}$$

Następnie podobne czynności wykonywane są dla całek  $\int_k^\infty e^{s_T+k} \mathbb{Q}(s_T | \Omega_0)$  oraz  $\int_k^\infty e^{2k} \mathbb{Q}(s_T | \Omega_0)$ .

Pozwala to wygenerować następujące transformaty Fouriera:

$$\mathcal{FT}_2(\xi) = \frac{\phi(\xi - 2\mathbb{I})}{\mathbb{I}\xi + 1} \quad (10)$$

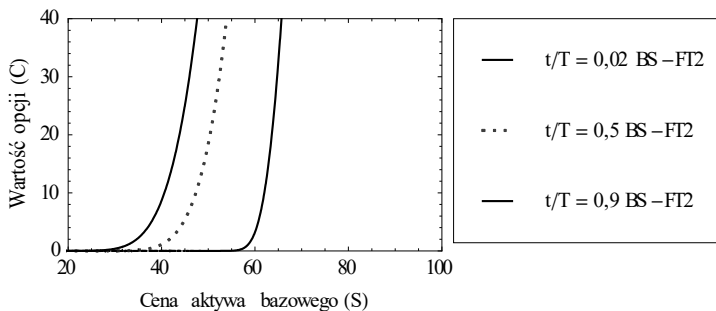
oraz

$$\mathcal{FT}_3(\xi) = \frac{\phi(\xi - 2\mathbb{I})}{\mathbb{I}\xi + 2} \quad (11)$$

Ostatecznie, wstawiając otrzymane wartości do wzoru (8) i obliczając odwrotną transformatę Fouriera, można otrzymać końcową formułę na wycenę opcji parabolicznych typu europejskiego. Przybiera ona poniższą postać (metoda oznaczana dalej jako BS-FT2):

$$C(S_0, 0) = S_0^2 e^{rT + \sigma^2 T} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi S_0^2 e^{2rT + \sigma^2 T}} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-\mathbb{I}\xi k} \phi(\xi - 2\mathbb{I})}{\mathbb{I}\xi (\mathbb{I}\xi + 1)(\mathbb{I}\xi + 2)} \right] d\xi \right) \quad (12)$$

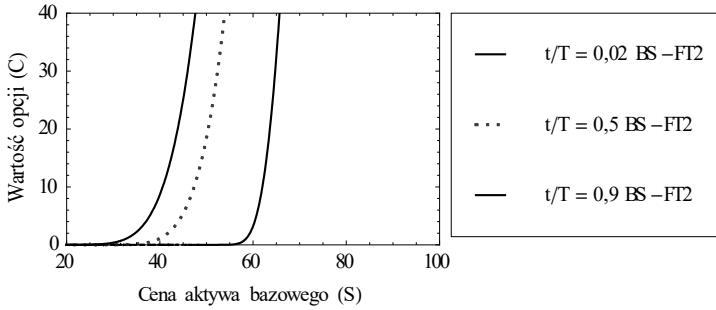
Łatwo dostrzec, że metoda BS-FT2 umożliwia przybliżenie wartości teoretycznych kontraktów lewarowanych o charakterze parabolicznym. Podobnie jak poprzednio, wskazane wydaje się sprawdzenie wpływu wykorzystywanych schematów numerycznych na zgodność generowanych wyników. Dalsza analiza w tej kwestii ograniczana jest do metod: trapezów, Newtona-Cotesa i Gaussa-Kronroda. Wszystkie obliczenia wykonywane są przy niezmiennych założeniach dotyczących: przedziału zmian cen aktywów bazowych, poziomu rozliczenia kontraktów, stopy wolnej od ryzyka i odchylenia standardowego rentowności aktywa bazowego. Rezultaty przeprowadzonych badań przedstawione są na rysunkach 5–7.



**Rysunek 5.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego trapezów

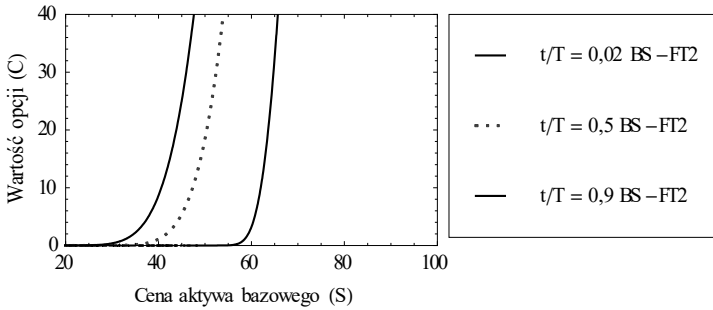
Źródło: opracowanie własne.





**Rysunek 6.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego Newtona-Cotesa

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 7.** Funkcje wypłat parabolicznych opcji kupna typu europejskiego wyznaczone dla różnych okresów do wygaśnięcia kontraktów za pomocą metody BS-FT2 przy wykorzystaniu schematu numerycznego Gaussa-Kronroda

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanych wyników można sformułować wniosek stanowiący, że zastosowane schematy numeryczne nie wpływają w istotny sposób na dokładność wyceny rozpatrywanych instrumentów finansowych. W konsekwencji za najważniejsze kryterium wyboru zarówno najlepszej metody określania wartości modelowych opcji parabolicznych, jak i najbardziej korzystnego schematu numerycznego wykorzystywanego w procesie wyceny, należy uznać szybkość obliczeniową.

### 3. Wycena opcji parabolicznych przy wykorzystaniu transformaty Fouriera

Sprawdzenie szybkości obliczeniowej wyceny opcji parabolicznych polega na obliczeniu czasu, jaki jest potrzebny do wyznaczenia wartości teoretycznych rozpatrywanych instrumentów finansowych. W tym celu wykorzystywany jest pakiet Mathematica 8.0 zainstalowany na komputerze z procesorem Intel i5-4210U CPU @ 1,70 GHz o pamięci RAM równej 6 GB. Dane wejściowe są identyczne z opisanymi wcześniej. Otrzymane wyniki zawarte są w tabelach 1 i 2.

**Tabela 1**

Szybkość generowania cen teoretycznych opcji parabolicznych (BS-FT1) w sekundach

	OTM ( $S_T = 55$ )	ATM ( $S_T = 60$ )	ITM ( $S_T = 65$ )
BS	0	0	0
BS-FT1 (metoda trapezów)	0,094	0,094	0,094
BS-FT1 (metoda Newtona-Cotesa)	0,031	0,031	0,031
BS-FT1 (metoda Gaussa-Kronroda)	0,015	0,016	0,016

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2**

Szybkość generowania cen teoretycznych opcji parabolicznych (BS-FT2) w sekundach

	OTM ( $S_T = 55$ )	ATM ( $S_T = 60$ )	ITM ( $S_T = 65$ )
BS	0	0	0
BS-FT2 (metoda trapezów)	0,094	0,094	0,094
BS-FT2 (metoda Newtona-Cotesa)	0,031	0,031	0,032
BS-FT2 (metoda Gaussa-Kronroda)	0,015	0,016	0,016

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanych wyników można sformułować trzy wnioski. Pierwszy z nich stanowi, że wykorzystanie metod wyceny opcji parabolicznych odwołujących się do procedury numerycznego całkowania, tj. BS-FT1 i BS-FT2, wiąże się zawsze z większym nakładem czasu potrzebnym do wygenerowania wyniku końcowego (w porównaniu do metody BS). Zgodnie z drugim wnioskiem, podejścia bazujące na transformacie Fouriera są porównywalne ze sobą pod względem szybkości obliczeniowej. Trzeci wniosek dotyczy natomiast dużego znaczenia wyboru schematu numerycznego wykorzystywanego do obliczania całek dla sprawności procesu wyceny opcji parabolicznych.

## Uwagi końcowe

Opcje paraboliczne zalicza się do lewarowanych instrumentów finansowych, których wartość zależna jest od notowań aktywów podstawowych. Analizowane kontrakty z jednej strony charakteryzują się mniejszą elastycznością w porównaniu do potęgowych opcji symetrycznych i asymetrycznych, z drugiej zaś proces ich wyceny wydaje się być prostszy i możliwy do zaimplementowania z przynajmniej dwóch innych rodzajów walorów bazujących na prawach pochodnych.

Poza wyceną opcji parabolicznych w artykule poruszone zostało również zagadnienie szybkości i dokładności obliczeniowej metod wykorzystywanych do wyceny instrumentów pochodnych. Spośród uwzględnionych metod na szczególną uwagę zasługują koncepcje odwołujące się do transformaty Fouriera (BS-FT1 i BS-FT2). Słuszność takiego poglądu znajduje potwierdzenie w dużym uniwersalizmie (metody te można wykorzystać w wielu rodzajach modeli wyceny opcji) i elastyczności (nie wszystkie schematy transformaty Fouriera zostały rozpoznane) prezentowanych podejść.

Pomimo że wyniki przeprowadzonych obliczeń wskazują na to, że modele BS-FT1 i BS-FT2 nie mogą stanowić interesującej alternatywy dla podejścia BS, to należy pamiętać, że zostało to wykazane tylko w warunkach słuszności założeń modelu Blacka i Scholesa (1973). Z tego powodu konieczne wydaje się prowadzenie dalszych badań nad efektywnością obliczeniową alternatywnych sposobów wyceny opcji, w szczególności w odniesieniu do modeli stochastycznej zmienności, np. modelu Hestona (1993). Schematy numeryczne wykorzystywane do obliczania przybliżonych wartości całek (wykorzystywanych w procesie wyceny opcji) stanowią istotne uzupełnienie przeprowadzanej analizy.

## Literatura

- Bakshi, G., Madan, D. (2000). Spanning and Derivative – Security Valuation. *Journal of Financial Economics*, 2 (55), 205–238. DOI: 10.1016/S0304-405X(99)00050-1.
- Barndorff-Nielsen, O.E. (1995). *Normal Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns*. University of Aarhus: Aarhus University Department Theoretical Statistics.
- Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 3 (81), 637–654. doi: 10.1086/260062.
- Brandimarte, P. (2014). *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management, and Economics*. New York: John Wiley & Sons.
- Brandimarte, P. (2006). *Numerical Methods in Finance and Economics: a MATLAB®-Based Introduction*. New York: John Wiley & Sons.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., Yor M. (2002). The Fine Structure of asset Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business*, 2 (75), 305–332. DOI: 10.1086/338705.
- Esser, A. (2004). *Pricing in (In)complete Markets: Structural Analysis and Applications*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag.
- Heynen, R.C., Kat, H.M. (2006). Pricing and Hedging Power Options. *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 3 (3), 253–261.
- Harrison, M., Kreps, D. (1979). Martingales and Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

- Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 2 (6), 327–343. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
- Kou, S. (2002). Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, 8 (48), 1086–1101. DOI: 10.1287/mnsc.48.8.1086.166.
- Madan, D., Carr, P., Chang, E. (1998). The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*, 1 (2), 79–105. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009703431535>.
- Madan, D.B., Milne, F. (1991). Option Pricing with VG Martingale Components. *Mathematical Finance*, 1 (4), 39–55. DOI: 10.1111/j.1467-9965.1991.tb00018.x.
- Merton, R.C. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics 1–2* (3), 125–144. DOI: 10.1016/0304-405X(76)90022-2.
- Rydberg, T.H. (1997). The Normal Inverse Gaussian Levy Process: Simulation and Approximation. *Communication in Statistics Stochastic Models*, 4 (13), 887–910. DOI: 10.1080/15326349708807456.
- Schmelzle, M. (2010). Option Pricing Formulae Using Fourier Transform: Theory and Application. Pobrano z: <http://pfdintegral.com> (22.04.2018).
- Zhu, J. (2000). *Modular Pricing of Options: An Application of Fourier Analysis*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag.

### PRICING PARABOLA OPTIONS USING FOURIER TRANSFORM

**Abstract:** *Purpose* – Comparative analysis of alternative methods of pricing options which allows to determine the value of parabolic options.

*Design/methodology/approach* – Investigating computational accuracy and speed of BS, BS-FT1 and BS-FT2 methods with different numerical schemes that can be used in the calculation process.

*Findings* – Under assumptions of the Black-Scholes model it is hard to prove superiority of the BS-FT1 and BS-FT2 models. However, due to their universalism and flexibility, these concepts should be developed.

*Originality/value* – A new option pricing method based on the Fourier transform can be used to value various types of derivatives in various option pricing models.

**Keywords:** parabola options, Fourier transform, Black-Scholes model

### Cytowanie

- Orzechowski, A. (2018). Wycena opcji parabolicznych przy wykorzystaniu transformaty Fouriera. *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, 2 (92), 301–312. DOI: 10.18276/frfu.2018.92-26.