ROBERT KRUSZEWSKI

Warszawa

Atraktory cykliczne i quasi-okresowe w modelu Kaldora z oczekiwaniami

Wprowadzenie

Model Kaldora jest jednym z pierwszych, obok modelu Michała Kaleckiego, nieliniowym modelem opisującym wahania produktu krajowego. Analizowane są wersje z czasem ciągłym i dyskretnym. W opracowaniu będzie skonstruowana wersja modelu Kaldora z czasem dyskretnym uwzględniająca oczekiwania co do wielkości produktu krajowego, które będą wykorzystane do konstrukcji funkcji opisującej zagregowany strumień konsumpcji. W literaturze dotyczącej modelu Kaldora funkcja konsumpcji przybiera kształt litery S (*sigmoid curve*) i jest modelowana przy pomocy funkcji arcus tangens. Modele z tak sformalizowanym opisem strumienia konsumpcji były badane m.in. przez Hermana¹, Lorenza² i Dohtaniego³. Wspomniani autorzy głównie skupiali się na zjawisku chaosu deterministycznego występującego w tych wersjach modelu Kaldora.

¹ R. Herrmann, *Stability and chaos in a Kaldor-type mode*, „DP 22”, Department of Economics University of Gottingen, 1985.

² H.W. Lorenz, *Multiple attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems*, w: *Dynamic economic models and optimal control*, ed. G. Feichtinger, North-Holland, Amsterdam 1992; H.W. Lorenz, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1993.

³ A. Dohtani, T. Misawa, T. Inaba, M. Yokoo, T. Owase, *Chaos, complex transients and noise: Illustration with a Kaldor model*, „Chaos Solitons & Fractals” 1996, nr 7, s. 2157–2174.

Prostota deskryptywnego modelu Kaldora czyni go idealnym punktem wyjściowym do zbadania wpływu oczekiwań na dynamikę produktu krajowego bez ingerencji w formalne założenia poczynione przez Kaldora. Oczekiwania formowane przez podmioty gospodarcze nie są częścią żadnego procesu optymalizacyjnego, co powoduje, że skonstruowany model będzie także modelem deskryptywnym. Drugim celem jest uwzględnienie elementów mikroekonomicznych, przy konstrukcji modelu cyklu koniunkturalnego. Oczekiwania formowane są na poziomie mikroekonomicznym przez podmioty gospodarcze (przedsiębiorstwa) i uwzględniają elementy natury behawioralnej. Wybrany sposób modelowania oczekiwań pozwala uwzględnić elementy ekonomii behawioralnej i ekonomii głównego nurtu w jednym modelu. Każdy z typów oczekiwań w sposób liniowy zależy od wielkości produkcji w okresie poprzednim. Taka konstrukcja oczekiwań dobrze odzwierciedla założenia częściowej racjonalności podmiotów gospodarczych, które ze względu na niewystarczającą informację i możliwości analityczne nie są w stanie podejmować optymalnych decyzji. W zastępstwie stosują proste heurystyki, które sprawdziły się w przeszłości.

Do zbudowania i analizy nieliniowego modelu Kaldora z oczekiwaniami będą użyte narzędzia ekonomii matematycznej, w tym teoria nieliniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym i teoria bifurkacji. Realizacji postawionych celów podporządkowana jest struktura artykułu. Część pierwsza zawiera opis dyskretnego modelu Kaldora. Część druga opisuje mechanizm powstawania oczekiwań na poziomie mikroekonomicznym i sposób ich agregacji. Model Kaldora z oczekiwaniami przedstawiony jest w części trzeciej. Część czwarta poświęcona jest analizie numerycznej zaproponowanego modelu, ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów cyklicznych i quasi-okresowych. Konkluzje zawarte są w części piątej.

1. Model Kaldora

Rozważana będzie Y dyskretna wersja nieliniowego modelu Kaldora:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = Y_t + \alpha(I_t - (Y_t - C_t)), \alpha > 0 \\ K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t, 0 < \delta < 1 \end{cases}, \quad (1)$$

w którym zmienne Y_t oraz K_t oznaczają odpowiednio poziom produktu krajowego i całkowity zasób kapitału w chwili t . Dodatkowo założono, że inwestycje

I_t i konsumpcja C_t są funkcjami zależnymi zarówno od produktu krajowego i całkowitego zasobu kapitału. Pierwsze równanie układu (1)

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = \alpha(I_t - (Y_t - C_t))$$

opisujące dynamikę produktu krajowego odzwierciedla założenie, że zmiana poziomu produkcji krajowej jest wprost proporcjonalna do różnicy między inwestycjami *ex ante* a oszczędnościami $S_t = Y_t - C_t$. Współczynnik proporcjonalności α mierzy szybkość reakcji przedsiębiorstw na nierównowagę między inwestycjami i oszczędnościami. Wartości współczynnika α należące do przedziału $(0,1)$ odzwierciedlają ostrożną (zachowawczą) reakcję przedsiębiorców, podczas gdy wartości parametru α większe od jedności oznaczają gwałtowne reakcje.

Drugie równanie układu (1) opisuje dynamikę całkowitego zasobu kapitału w modelowanej gospodarce

$$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t.$$

Zmiana poziomu całkowitego zasobu kapitału zwiększana jest dzięki inwestycjom *ex ante* I_t i pomniejszana przez deprecjację δK_t , gdzie δ jest stałą stopą deprecjacji kapitału.

Układ dynamiczny (1) jest podstawą do tworzenia nowych wersji modelu Kaldora. By je uzyskać, niezbędne jest zdefiniowanie (podanie postaci funkcyjnej) funkcji inwestycji I_t oraz funkcji oszczędności S_t (a dokładniej funkcji konsumpcji) zgodnie z oryginalnymi założeniami Kaldora:

- relacji pomiędzy krańcową skłonnością do inwestycji i krańcową skłonnością do oszczędzania

$$\frac{\partial I_t}{\partial Y_t} > \frac{\partial S_t}{\partial Y_t} \quad (a)$$

dla tzw. normalnego poziomu produktu krajowego oraz

$$\frac{\partial I_t}{\partial Y_t} < \frac{\partial S_t}{\partial Y_t} \quad (a')$$

dla bardzo niskiego i wysokiego poziomu produktu krajowego;

- negatywnej relacji między inwestycjami a całkowitym zasobem kapitału lub równoważnie pozytywnej relacji między oszczędnościami a całkowitym zasobem kapitału

$$\frac{\partial I_t}{\partial K_t} < 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial S_t}{\partial K_t} > 0. \quad (b)$$

Spełnienie założenia (a) prowadzi do zastosowania funkcji inwestycji I_t w postaci funkcji, której wykres przypomina literę S, lub równoważnie funkcji oszczędności o wykresie, który ma kształt odwróconej litery S.

W literaturze przedmiotu najczęściej strumień konsumpcji jest modelowany przy pomocy funkcji arcus tangens:

$$C_t = c_0 + \frac{2}{\pi} c_1 \arctg\left(\frac{\pi c_2}{2c_1} (Y_t - Y^*)\right), \quad (2)$$

gdzie Y^* oznacza określony egzogenicznie poziom produktu krajowego w równowadze (tzw. normalny poziom produktu krajowego), parametry c_0, c_1, c_2 są dodatnie.

Inwestycje I_t są liniową funkcją produktu krajowego oraz całkowitego zasobu kapitału i opisane są formułą:

$$I_t = b(K_t^d - K_t) + \delta K_t, \quad 0 < b < 1, \quad (3)$$

gdzie K_t^d oznacza pożądany poziom całkowitego zasobu kapitału w chwili t , który jest liniową funkcją bieżącego poziomu produktu krajowego, czyli $K_t^d = kY_t$ ($k > 0$). Ostatecznie funkcja inwestycji może być zapisana wprost jako liniowa funkcja produktu krajowego i całkowitego zasobu kapitału:

$$I_t = bkY_t - (b - \delta)K_t. \quad (4)$$

gdzie $k > 0$ oraz $0 < \delta < b < 1$. Założenie, że stopa deprecjacji δ jest mniejsza od parametru b , czyni zadość założeniu Kaldora o negatywnej relacji inwestycji i całkowitego zasobu kapitału.

W dalszej części pracy będzie zaproponowany odmienny sposób modelowania strumienia konsumpcji. Zamiast przyjętej funkcji arcus tangens będzie zastosowane zupełnie inne podejście. Uwzględni ono podstawy mikroekonomiczne związane ze sposobem modelowania strumienia konsumpcji oraz elementy behawioralne. W modelowaniu strumienia konsumpcji będą uwzględnione oczekiwania co do wielkości produktu krajowego, których konstrukcja zostanie przedstawiona w następnej części.

2. Oczekiwanie

Podobnie jak Simon⁴ założono, że uczestnicy rynku są częściowo racjonalni, tzn. ze względu na niewystarczającą informację i możliwości analityczne nie są w stanie podejmować optymalnych decyzji. W zastępstwie stosują proste heurystyki, które sprawdziły się w przeszłości. Założono, że oczekiwania podmiotów rynkowych są średnią ważoną dwóch typów oczekiwań. Pierwszy typ to oczekiwanie ekstrapolacyjne, a drugi to odwrotne oczekiwania ekstrapolacyjne. Badania ankietowe dotyczące zachowania podmiotów ekonomicznych pokazują, że gracze rynkowi na ogół stosują mieszanki tych dwóch typów oczekiwań do przewidywania wartości zmiennych ekonomicznych (Ito⁵). Podobne schematy postępowania były obserwowane w eksperymentach dotyczących wyceny instrumentów finansowych (Smith⁶, Sonnemans⁷). Zagregowane oczekiwania poziomu produktu krajowego w okresie t powstają na koniec okresu poprzedniego, tj. okresu $t-1$ i są średnią ważoną oczekiwań ekstrapolacyjnych ($E^1_t[Y_t]$) i odwrotnych oczekiwań ekstrapolacyjnych ($E^2_t[Y_t]$). Oczekiwania powstają w odniesieniu do określone egzogenicznie poziomu produktu krajowego w równowadze Y^* (tzw. normalnego poziomu produktu krajowego). Oczekiwania pierwszego typu wyrażają się równością:

$$E^1[Y_t] = Y_t + \mu_1(Y_t - Y^*), \mu_1 > 0. \quad (5)$$

Oczekiwania drugiego typu opisane są następującą regułą:

$$E^2[Y_t] = Y_t + \mu_2(Y^* - Y_t), 0 < \mu_2 < 1. \quad (6)$$

Założono, że większe odchylenia produktu krajowego od poziomu Y^* powodują zmniejszenie wagi związanej z oczekiwaniami ekstrapolacyjnymi. Podmioty rynkowe, sytuacje skrajne (duże odchylenia od równowagi Y^*) odbierają jako niestabilne. Formalnie reguła opisująca zmienność wagi dla oczekiwań ekstrapolacyjnych przyjmuje postać:

⁴ H. Simon, *A behavioral model of rational choice*, „Quarterly Journal of Economics” 1955, nr 9, s. 99–118.

⁵ T. Ito, *Foreign exchange rate expectations: Micro survey data*, „American Economic Review” 1990, nr 80, s. 434–449.

⁶ V. Smith, *Papers in experimental economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

⁷ J. Sonnemans, C. Hommes, J. Tuinstra, H. Van de Velden, *The instability of heterogeneous cobweb economy: a strategy experiment on expectation formation*, „Journal of Economic Behaviour and Organization” 2004, nr 54, s. 453–481.

$$w_t = \frac{I}{I + \gamma^2(Y_t - Y^*)^2}, \gamma > 0. \quad (7)$$

Ostatecznie równanie opisujące zagregowane oczekiwania co do poziomu produktu krajowego określa zależność:

$$E[Y_t] = w_t E^I[Y_t] + (I - w_t) E^2[Y_t], \quad 0 < w_t \leq I. \quad (8)$$

3. Model Kaldora z oczekiwaniami

W konstruowanym modelu Kaldora z oczekiwaniami funkcja konsumpcji przyjmuje postać:

$$C_t = C_0 + cE[Y_t], \quad 0 < c < 1, \quad C_0 > 0, \quad (9)$$

gdzie $C_0 > 0$ oznacza konsumpcję autonomiczną, a $0 < c < 1$ oznacza krańcową skłonność do konsumpcji.

Podstawiając zależność (4) i (9) do układu (1), otrzymano układ równań różnicowych będący matematyczną reprezentacją modelu Kaldora z oczekiwaniami:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = (1 - \alpha + \alpha b k) Y_t + \alpha C_0 + \alpha c E[Y_t] - \alpha(b - \delta) K_t \\ K_{t+1} = b(k Y_t - K_t) + K_t \end{cases} \quad (10)$$

W kolejnym kroku egzogeniczny poziom produktu krajowego Y^* oraz odpowiadający mu poziom całkowitego zasobu kapitału K^* zostaną wyrażone przy pomocy parametrów modelu. Punkt stały (Y^*, K^*) układu dynamicznego (10) spełnia warunki:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = Y_t = Y^* \\ K_{t+1} = K_t = K^* \end{cases}.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań pozwala uzależnić egzogeniczną równowagę przy pomocy parametrów skonstruowanego modelu:

$$\begin{cases} Y^* = \frac{C_0}{1 - c - \delta k} \\ K^* = k Y^* = \frac{k C_0}{1 - c - \delta k} \end{cases}. \quad (11)$$

W celu uproszczenia strony technicznej analizy badanego modelu wprowadzono nowe zmienne:

$$\begin{cases} x_t = K_t - kY^* \\ y_t = Y_t - Y^* \end{cases}, \quad (12)$$

które opisują odchylenia ścieżek czasowych produktu krajowego i całkowitego zasobu kapitału w stosunku do egzogenicznej równowagi (Y^*, K^*) . Po wprowadzeniu nowych zmiennych (12) model (10) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1-b)x_t + bky_t \\ y_{t+1} = (1-\alpha + \alpha bk)y_t + \alpha(\delta-b)x_t + \alpha cE[y_t] - \frac{\alpha cC_0}{1-c-\delta k} \end{cases}. \quad (13)$$

Powyższy układ równań różniczkowych jest nieliniowy i dodatkowo nie istnieje jego analityczne rozwiązanie opisujące zachowanie się zmiennych (x_t, y_t) w każdej chwili czasu t . Do analizy układu (13) zostaną użyte narzędzia jakościowej teorii nieliniowych równań różnicowych. Niech $H: R^2 \rightarrow R^2$ będzie odwzorowaniem oznaczającym prawą stronę układu (13):

$$H(x, y) = \begin{cases} (1-b)x + bky \\ (1-\alpha + \alpha bk)y + \alpha(\delta-b)x + \alpha cE[y] - \frac{\alpha cC_0}{1-c-\delta k} \end{cases}. \quad (14)$$

Pierwszym elementem jakościowej analizy układu (13) jest wyznaczenie położenia równowagi (rozwiązania stacjonarnego). Równowaga modelu (13) jest punktem stałym odwzorowania H . Punkty stałe (x^*, y^*) odwzorowania H spełniają warunek:

$$H(x^*, y^*) = (x^*, y^*),$$

który jest równoważny następującemu układowi równań:

$$\begin{cases} x^* = (1-b)x^* + bky^* \\ y^* = (1-\alpha + \alpha bk)y^* + \alpha(\delta-b)x^* + \alpha cE[y^*] - \frac{\alpha cC_0}{1-c-\delta k} \end{cases}. \quad (15)$$

Wniosek 1

Układ dynamiczny (13) ma

- jeżeli jeden punkt stały (równowagę) $F^* = (0, 0)$, jeżeli $0 < c < \frac{1-\delta k}{1+\mu_1}$ lub $1-\delta k < 0$;
- trzy punkty stałe: $F^* = (0, 0)$ i dwa dodatkowe punkty stałe F_1^* oraz F_2^* symetryczne względem F^* , jeżeli $1-\delta k > 0$ i $\frac{1-\delta k}{1+\mu_1} < c < \min\{1, \frac{1-\delta k}{1-\mu_2}\}$.

Kolejnym etapem analizy jakościowej badanego modelu jest ustalenie warunków, jakie muszą spełniać zmienne egzogeniczne, by stany stacjonarne były lokalnie asymptotycznie stabilne. Stabilność stanu stacjonarnego układu (13) zależy od wartości własnych macierzy Jacobiego odwzorowania H , która przyjmuje postać:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1-b & bk \\ \alpha(\delta-b) & 1-\alpha+\delta bk + \alpha c \frac{dE[y]}{dy} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Analizę lokalnej asymptotycznej stabilności punktów stałych (rozwiązań stacjonarnych) układu (13) rozpoczęto od równowagi trywialnej $F^* = (0, 0)$. Macierz Jacobiego odwzorowania H w punkcie F^* :

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1-b & bk \\ \alpha(\delta-b) & 1-\alpha+\delta bk + \alpha c(1+\mu_1) \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy $J(0, 0)$ są co do modułu mniejsze od jedności (wówczas punkt stały F^* jest lokalnie asymptotycznie stabilny), jeśli spełnione są następujące warunki⁸:

$$\begin{aligned} 1 + \text{tr}J(0, 0) + \det J(0, 0) &> 0 \\ 1 - \text{tr}J(0, 0) + \det J(0, 0) &> 0. \\ 1 - \det J(0, 0) &> 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Warunki (17) są równoważne następującym nierównościom:

$$\begin{aligned} c < \theta_1 &= \frac{4-2\alpha+b(-2+\alpha+bk\alpha-k(-2+b+\alpha)\delta)}{\alpha(b-2)(1+\mu_1)} \\ c < \theta_2 &= \frac{\alpha+bk\alpha-k(b+\alpha)\delta}{\alpha(1+\mu_1)} \\ c < \theta_3 &= \frac{-\alpha+b(-1+\alpha+bk\alpha-k(-1+b+\alpha)\delta)}{\alpha(b-1)(1+\mu_1)} \end{aligned}$$

⁸ A. Medio, M. Lines, *Economic Dynamics. A Primer*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, s. 52.

Wniosek 2

Równowaga $F^* = (0,0)$ układu (13) jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy krańcowa skłonność do konsumpcji spełnia warunek: $0 < c < \min\{1, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

4. Dynamika globalna: bifurkacje i atraktory

Jedną z fundamentalnych cech nieliniowych równań różnicowych jest duża różnorodność możliwych scenariuszy opisujących dynamiczne własności rozwiązań. Rozwiązania mogą zbiegać do równowagi stacjonarnej, rozwiązania okresowego lub zachowywać się chaotycznie. Rozwiązania chaotyczne są wrażliwe na małe zmiany warunku początkowego. Własność ta istotnie ogranicza zakres prognozy badanej zmiennej ekonomicznej i uwypukla istotność badania dynamiki nieliniowych modeli ekonomicznych pod kątem występowania zjawiska chaosu deterministycznego. W dalszej części pracy zostaną omówione wybrane elementy dynamiki globalnej badanego modelu. Symulacje numeryczne długookresowego zachowania hipotetycznego rynku będą przedstawione na odpowiednich diagramach bifurkacyjnych przedstawiających istniejące atraktory jako multifunkcje wybranego parametru modelu dla zadanego warunku początkowego.

Zanim będą analizowane scenariusze utraty stabilności i lokalnych bifurkacji, zostaną przytoczone podstawowe pojęcia z teorii bifurkacji pomocne w dalszej analizie. Dla jednoparametrowej rodziny dyskretnych układów dynamicznych stabilne położenie równowagi traci stabilność w wyniku bifurkacji typu pitchfork (bifurkacja widelcowa), gdy jedna z wartości własnych macierzy linearyzacji przy zmianie parametru bifurkacyjnego, zmieniając swoją wartość, przekracza 1. Pozostałe wartości własne macierzy linearyzacji są co do modułu mniejsze od jedności. W wyniku tej bifurkacji pojawiają się dwa dodatkowe położenia równowagi. Drugi z możliwych przebiegów bifurkacji widelcowej polega na redukcji liczby równowag. W wyniku bifurkacji Neimarka–Sackera w układzie dynamicznym pojawiają się orbity okresowe lub quasi-okresowe, występuje to, gdy macierz linearyzacji ma parę zespolonych sprzężonych wartości własnych o jednostkowym module. Przekraczanie granicy obszaru wyznaczonego przez warunki (17) dla równowagi $F^* = (0,0)$ prowadzi do utraty stabilności i wiąże się z występowaniem różnych typów bifurkacji.

Naruszenie drugiej nierówności w warunku (17) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji widelcowej. Wówczas jedna z wartości własnych macierzy linearyzacji jest równa 1. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy $1 - \text{Tr}J(0,0) + \text{Det}J(0,0) = 0$ oraz $\text{Tr}J(0,0) \in (0,2)$ i $\text{Det}J(0,0) \in (-1,1)$ (pozostałe warunki są spełnione). Naruszenie trzeciej nierówności w warunku (17) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji Neimarka–Sackera. Wówczas macierz linearyzacji ma parę zespolonych sprzężonych wartości własnych, których moduł jest równy jedności. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy $1 - \text{Det}J(0,0) = 0$ oraz pierwsze dwie nierówności są spełnione, tj. $\text{Tr}J(0,0) \in (-2,2)$

Analiza zaproponowanego modelu będzie przeprowadzona z uwzględnieniem dwóch kluczowych parametrów: krańcowej skłonności do konsumpcji c i parametru α określającego szybkość reakcji podmiotów rynkowych na nierównowagę między inwestycjami a oszczędnościami.

Rysunek 1. Diagram bifurkacyjny dla parametru c

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 2. Diagram bifurkacyjny i wykładnik Lapunowa dla parametru c

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 3. Diagram bifurkacyjny i wykładnik Lapunowa dla parametru c

Źródło: obliczenia własne.

Rysunki 1, 2 oraz 3 przedstawiają diagramy bifurkacyjne analizowanego modelu ze względu na krańcową skłonność do konsumpcji. Dla przyjętych parametrów symulacji numerycznej początkowo stabilna jest równowaga $F^*(0,0)$. Wzrost wartości krańcowej skłonności do konsumpcji w każdym przypadku prowadzi do utraty stabilności przez równowagę trywialną. Możliwe są tylko dwa scenariusze zmian własności dynamicznych badanego modelu w wyniku przekraczania przez parametr c wartości krytycznej (tzw. punktu bifurkacji). Przekraczanie obszaru lokalnej asymptotycznej stabilności skutkuje wystąpieniem bifurkacji widelcowej lub bifurkacji Neimarka–Suckera. Bifurkacja widelcowa zachodzi dla wartości parametru α mniejszych od jedności. W jej wyniku stabilna równowaga trywialna staje się niestabilna i pojawiają się dwie nowe

równowagi stacjonarne, które położone są symetrycznie względem równowagi trywialnej (rysunek 1). Parametr k nie ma wpływu na przebieg pierwszego scenariusza, zarówno wartości mniejsze od jedności, jak i większe od jedności generują tę samą sekwencję zmian własności dynamicznych badanego modelu.

Drugi scenariusz utraty stabilności przez równowagę trywialną jest przedstawiony na rysunku 2. W tym scenariuszu w wyniku bifurkacji Neimarka–Sackera w otoczeniu niestabilnej równowagi $F^*(0,0)$ pojawia się zamknięta krzywa, która jest niezmiennicza ze względu na odwzorowanie H . Wzdłuż tej krzywej można obserwować ruch okresowy lub quasi-okresowy, tzn. leżą na niej atraktory cykliczne i quasi-okresowe. Bifurkacja Neimarka–Sackera zachodzi dla wartości parametru α większych od jedności w połączeniu z wartościami parametru k mniejszymi od jedności (rysunek 2, $\alpha = 1.4$, $k = 0.9$). Podobny scenariusz zmian można także zaobserwować, gdy parametr α jest mniejszy od jedności, a parametr k jest większy od jedności.

Wpływ parametru c na długookresową dynamikę badanego modelu ($\alpha = 1.1$, $k = 1.1$) przedstawiono na rysunku 3. Rosnąca krańcowa skłonność do konsumpcji destabilizuje równowagę trywialną, prowadząc do pojawienia się atraktorów quasi-okresowych. Dalszy wzrost parametru c upraszcza dynamikę modelu, pojawiają się dwie asymptotycznie stabilne równowagi stacjonarne. Obserwujemy zjawisko dwustabilności.

Długookresową dynamikę badanego modelu ze względu na parametr α przedstawiono na rysunku 4, wartość parametru k przyjęta do symulacji numerycznych wynosi 0.95. Przechodzimy od współistniejących równowag stacjonarnych do atraktorów quasi-okresowych (największy wykładnik Lapunowa jest równy zero) i okresowych.

Jednowymiarowe diagramy bifurkacyjne badanego modelu wskazują na występowanie zjawiska wielostabilności: od współistniejących, stacjonarnych równowag, przez współistniejące równowagi stacjonarne i atraktor cykliczny, po współistniejące równowagi stacjonarne wraz atraktorami cyklicznymi o różnym okresie i amplitudzie.

Basen przyciągania atraktora zawiera wszystkie pozycje wyjściowe gospodarki, które w długim okresie zbiegają do danego atraktora. Analiza basenów przyciągania pozwala odpowiedzieć na następujące pytanie: Dlaczego gospodarki o takich samych parametrach i niewiele różniących się pozycjach wyjściowych charakteryzują się cyklami o różnej długości i amplitudzie?

Rysunek 4. Diagram bifurkacyjny i wykładnik Lapunowa dla parametru α

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 5. Współistniejące atraktory okresowe o okresie sześć, siedem i jeden wraz z ich basenami przyciągania

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 6. Współistniejące równowagi stacjonarne wraz z ich basenami przyciągania
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 6. Współistniejący atraktor okresowy o okresie osiem z dwoma równowagami stacjonarnymi i atraktorem quasi-okresowym wraz z ich basenami przyciągania
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 7. Współistniejący atraktor okresowy o okresie sześć z dwoma równowagami stacjonarnymi i atraktorem quasi-okresowym wraz z ich basenami przyciągania

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 8. Współistniejące atraktory okresowe o okresie sześć, dwadzieścia i jeden wraz z ich basenami przyciągania

Źródło: obliczenia własne.

Wielostabilność atraktorów okresowych i quasi-okresowych oraz równowag stacjonarnych jest zjawiskiem dominującym w badanym modelu. Wart odnotowania jest brak atraktorów chaotycznych. Współistniejące atraktory okresowe różnią się długością cyklu i jego amplitudą. Współistnieją także cykle o tej samej długości różniące się amplitudą zmian.

Podsumowanie

W pracy zaproponowano wersję modelu Kaldora, w której uwzględniono heterogeniczne oczekiwania co do wielkości produktu całkowitego w gospodarce. Przewidywany poziom produktu krajowego jest mieszanką oczekiwań ekstrapolacyjnych i odwrotnych oczekiwań ekstrapolacyjnych. Podejście to stanowi nawiązanie do mikroekonomicznych podstaw makroekonomii z jednej strony i nawiązuje do ekonomii behawioralnej z drugiej strony. Dynamika skonstruowanego nieliniowego modelu jest złożona, występują zarówno atraktory okresowe o zróżnicowanej długości cyklu, jak i atraktory quasi-okresowe. Immmanentną cechą tak skonstruowanego modelu jest współlistnienie atraktorów cyklicznych o zróżnicowanym okresie, atraktorów quasi-okresowych i równowag stacjonarnych. Wyznaczono wartości parametrów, dla których równowaga stacjonarna jest lokalnie asymptotycznie stabilna. Zbadano dynamikę globalną modelu za pomocą diagramów bifurkacyjnych.

Literatura

- Agliari A., Dieci R., Gardini L., *Homoclinic tangles in a Kaldor-like business cycle model*, „Journal of Economic Behavior & Organization” 2007, nr 62.
- Dobrescu L.I., Opris D., *Neimark–Sacker bifurcation for the discrete-delay Kaldor–Kalecki model*, „Chaos, Solitons and Fractals” 2009, nr 41.
- Dohtani A., *Existence of stable quasi-periodic solutions and persistence of business fluctuations*, „Journal on Applied Mathematics” 1993, nr 53.
- Dohtani A., Misawa T., Inaba T., Yokoo M., Owase T., *Chaos, complex transients and noise: Illustration with a Kaldor model*, „Chaos Solitons & Fractals” 1996, nr 74.
- Herrmann R., *Stability and chaos in a Kaldor-type mode*, DP 22, Department of Economics University of Gottingen, 1985.
- Ito T., *Foreign exchange rate expectations: Micro survey data*, „American Economic Review” 1990, nr 80.
- Lorenz H.W., *Multiple attractors, complex basin boundaries, and transient motion in deterministic economic systems*, w: *Dynamic economic models and optimal control*, ed. G. Feichtinger, North-Holland, Amsterdam 1992.
- Lorenz H.W., *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1993.
- Medio A., Lines M., *Economic Dynamics. A Primer*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

- Simon H., *A behavioral model of rational choice*, „Quarterly Journal of Economics” 1955, nr 9.
- Smith V., *Papers in experimental economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- Sonnemans J., Hommes C., Tuinstra J., Van de Velden H., *The instability of heterogeneous cobweb economy: a strategy experiment on expectation formation*, „Journal of Economic Behaviour and Organization” 2004, nr 54.
- Szydłowski M., Krawiec A., *The stability problem in the Kaldor–Kalecki business cycle model*, „Chaos, Solitons and Fractals”, 2005, nr 25.

**Periodic and quasiperiodic attractors
in a Kaldor-like business cycle model with expectations**

Summary

We investigate the dynamics of the proposed Kaldor-like business cycle model with heterogeneous expectations. The possible long-term behaviour of the national income has been described. We investigate, how the dynamics of the model depend on parameters.

Keywords: business cycle, expectations, bifurcation, attractor

Translated by Robert Kruszewski