COLLOQUIA THEOLOGICA OTTONIANA 39 (2023)
s. 173–191
DOI: 10.18276/cto.2023.39-08
ISSN (print) 1731-0555 | ISSN (online) 2353-2998

MATEUSZ LISOWSKI
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Polska | Instytut Filozofii
ORCID: 0000-0003-1542-5207

Aksjomatyzacja czterowartościowej logiki modalnej Łukasiewicza

AXIOMATISATION OF ŁUKASIEWICZ'S FOUR-VALUED LOGIC

Summary

The main subject of this article is the axiomatisation of Jan Łukasiewicz's Ł-modal logic, a strict, regular, four-value modal logic whose matrix is a Cartesian product of two different two-value propositional matrices. Ł-modal logic was developed on the basis of philosophical discussions and logic research conducted in the Lviv-Warsaw school of logic, which focused on future contingents and temporal modalities. This article should deliver an overview of Ł-modal logic axiomatic systems and highlight differences and similarities between different axiomatic systems. To achieve this, it will describe properties of axiomatic systems, such as independence, simplicity, and the number of symbols used. These properties will then be used to analyse and compare selected axiomatisations. The analysis will be developed across (a) the original Łukasiewcz axiomatic system, which includes the prothotetic δ connective, (b) Lemmon's axiomatic system, (c) Kripke's axiomatic system, (d) Dywan's axiomatic system, (e) Tkaczyk's axiomatic system, with the jumping necessity theorem, (f) and axiomatic systems with a ternary connective.

Keywords: modal logic, Łukasiewicz, axiomatic systems

Wstęp

Jan Łukasiewicz był znawcą nie tylko współczesnej logiki matematycznej, ale także filozofii i historii logiki[1]. W szczególności warto zwrócić uwagę na zainteresowanie Łukasiewicza myślą Arystotelesa i stoików, która często stawała się bodźcem

1 Por. J. Łukasiewicz, *System logiki modalnej*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii – pisma wybrane*, Warszawa 1961.

wyznaczającym kierunek jego badań. Doniosłe prace Łukasiewicza z zakresu logiki wielowartościowej i modalnej wyrastały z przeprowadzonych w starożytności analiz dotyczących pojęć modalnych, ze szczególnym uwzględnieniem rozważań Arystotelesa nad wartością logiczną zdań opisujących przyszłe zdarzenia przygodne. To, że Łukasiewicz inspirował się pracami Stagiryty i innych starożytnych filozofów, nie oznacza jednak, że zawsze zgadzał się z ich poglądami. Problematyka pojęć modalnych wielokrotnie znajdowała się w centrum badań Łukasiewicza. Był on przeświadczony, że właśnie ta problematyka może wyznaczyć kierunek rozwoju logiki. Przeświadczenie to było silnie ugruntowane w przekonaniach filozoficznych Łukasiewicza, które to stawiały go w szeregach indeterministów. Łukasiewicz był zdania, że wolność jest czymś, co realnie przysługuje ludziom. Sądził on zarazem, że jest to nie do pogodzenia z klasycznym rachunkiem zdań. Tym samym był przekonany, że w logice klasycznej tkwi błąd, na który lekarstwo miały stanowić modalne funktory konieczności i możliwości. Warto przy tym podkreślić, że w rozumieniu Łukasiewicza były to funktory ekstensjonalne. Konsekwencjami takiego ujęcia było wiele problemów, które pojawiły się na gruncie proponowanych przez niego systemów. Pierwsza próba stworzenia przez Łukasiewicza logiki modalnej była jednocześnie, wraz z prowadzonymi niezależnie badaniami Clarence'a Irvinga Lewisa, jedną z pierwszych prób konstrukcji logiki modalnej oraz logik wielowartościowych. Efektem tych badań była logika trójwartościowa, logika *n*-wartościowa i logika nieskończenie wielowartościowa, przedstawione m.in. w artykule *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*[2]. Trudności, które napotkały pierwsze prace Łukasiewicza w tej dziedzinie, doprowadziły do podjęcia przez niego kolejnej próby ujęcia analizy pojęć modalnych w system wielowartościowy oparty na nowych założeniach. Był to czterowartościowy system Ł-modalny. Rezultaty te zostały przedstawione w artykule *System logiki modalnej*[3]. Wyniki zawarte w tym artykule nie są prostą kontynuacją prac Łukasiewicza z lat dwudziestych i trzydziestych. Niniejszy artykuł jest próbą systematycznej prezentacji zawartości i aksjomatyzacji logiki Ł-modalnej, a także uzupełnienia dotychczasowych prac na ten temat o pewne nowe wyniki.

1. Język systemu Ł-modalnego

System Ł-modalny może być charakteryzowany w języku przedmiotowym, do którego należą: (a) zmienne zdaniowe: p, q, r, które są wyrażeniami atomicznymi;

2 Por. idem, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii...*

3 Por. idem, *System logiki modalnej…*

(b) funktory jednoargumentowe: negacji $\neg$, afirmacji *afm*, tautologii *tlg*, antylogii *alg*, możliwości $\Diamond$ oraz konieczności $\Box$; (c) funktory dwuargumentowe: koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\rightarrow$ oraz równoważności $\equiv$; (d) funktor trójargumentowy $\odot$; (e) jednoargumentowa zmienna funktorowa δ; (f) nawiasy. Funktory konieczności i możliwości nazywa się funktorami modalnymi. Argumentami wszystkich funktorów są wyłącznie wyrażenia. Wyrażenia złożone są zbudowane z funktorów, ich argumentów i nawiasów w zwykły sposób, z tym że funktory jednoargumentowe i trójargumentowe mają notacje prefiksową, a dwuargumentowe infiksową, zatem:

– wszystkie zmienne zdaniowe należą do zbioru poprawnie zbudowanych wyrażeń;
– jeżeli wyrażenie A należy do zbioru poprawnie zbudowanych wyrażeń, to wyrażenia $\ulcorner\neg A\urcorner$, $\ulcorner\Diamond A\urcorner$, $\ulcorner afm(A)\urcorner$, $\ulcorner alg(A)\urcorner$, $\ulcorner tlg(A)\urcorner$ oraz $\ulcorner\Box A\urcorner$ również do niego należą;
– jeżeli wyrażenia A oraz B należą do zbioru poprawnie zbudowanych wyrażeń, to wyrażenia $\ulcorner A \vee B\urcorner$, $\ulcorner A \wedge B\urcorner$, $\ulcorner A \rightarrow B\urcorner$ i $\ulcorner A \equiv B\urcorner$ również do niego należą;
– jeżeli wyrażenia A, B oraz C należą do zbioru poprawnie zbudowanych wyrażeń, to wyrażenie $\ulcorner\odot(A, B, C)\urcorner$ również do niego należy.

Przy braku nawiasów najkrótszy zasięg mają funktory jednoargumentowe, a następnie kolejno funktory: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\odot$. Nieco uwagi chciałbym jeszcze poświęcić symbolowi δ, który jest uznawany za zmienny funktor od argumentów zdaniowych. Zmienne funktory zostały wprowadzone wraz ze zmiennymi kwantyfikatorami przez Stanisława Leśniewskiego w jego prototetyce. Sam Łukasiewicz zmienne funktory wraz z ich znaczeniem omawia w pracy *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych*[4]. Symbol ten ma więc być zmienną przebiegającą zbiór funktorów, przy czym zaznaczone jest, że mogą to być funktory wieloargumentowe, pod warunkiem, że wszystkie argumenty przyjmowane przez nie stanowi ta sama, pojedyncza zmienna.

2. Podstawowa logika modalna

Jak wspomniałem we wstępie, dla systemu Ł-modalnego ważne są inspiracje filozoficzne. Łukasiewicz poszukuje nie jakichkolwiek praw zawierających spójniki modalne, ale tych, które można uznać za merytorycznie trafne w kontekście przyjętych przez niego założeń. Podstawowa logika modalna obejmuje te twierdzenia, które zdaniem Łukasiewicza są bądź oczywiście prawdziwe, bądź szeroko akceptowane w klasycznych tekstach filozoficznych. Twierdzenia podstawowej logiki modalnej dzielą się na zaakceptowane, które poprzedza symbol $\vdash$, i odrzucone, które poprzedza symbol $\dashv$. Chociaż Łukasiewicz wyraźnie tego

4 Por. ibidem.

nie mówi, z kontekstu wynika, że symbol $\dashv$ poprzedza wyrażenia, które nie są tautologiami, czyli takie, które mają co najmniej jedno fałszywe podstawienie, a nie takie, które mają wyłącznie fałszywe podstawienia. Łukasiewicz zmierza bowiem zawsze do tego, by w miarę możliwości wszystkie wyrażenia zostały podzielone na te, które poprzedza symbol $\dashv$, i te, które poprzedza symbol $\vdash$. Taki podział, jeśli się go osiągnie, może stanowić zarówno wynik pełności systemu, jak i jego rozstrzygalności.

Zdaniem Łukasiewicza każdy system, który pretenduje do miana merytorycznie trafnej logiki modalnej, musi respektować twierdzenia podstawowej logiki modalnej: „System nazywam logiką modalną wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podstawową logikę modalną jako swą część"[5]. Znaczy to, że w systemie takim dowodliwe musi być każde twierdzenie zaakceptowane na gruncie podstawowej logiki modalnej, a zarazem nie możne być w nim dowodliwe żadne twierdzenie odrzucone na gruncie podstawowej logiki modalnej. Można więc powiedzieć, że podstawowa logika modalna ma wyznaczać granice merytorycznie trafnej logiki modalnej przez powiązanie twierdzeń tej logiki z poczuciem oczywistości i analizami filozoficznymi: „System logiczny nazywa się zwykle «logiką modalną», jeśli występują w nim wyrażenia modalne takie, jak «możliwe» lub «konieczne». Zamiast tej raczej niewyraźnej charakterystyki spróbuję podać dokładną definicję logiki modalnej według tradycji zapoczątkowanej przez Arystotelesa"[6]. Podstawowa logika modalna opiera się na ośmiu założeniach, które zostaną teraz omówione. Pierwsze trzy twierdzenia dotyczą własności funktora możliwości:

$$\vdash p \to \Diamond p \tag{1}$$
$$\dashv \Diamond p \to p \tag{2}$$
$$\dashv \Diamond p \tag{3}$$

Twierdzenie (1) wyraża przekonanie, że każdy zachodzący stan rzeczy jest możliwy, innymi słowy, każde zdanie, które jest prawdziwe, jest tym bardziej możliwe. Twierdzenie (1) stanowi odpowiednik scholastycznej zasady: *ab esse ad posse valet consequentia formalis*. Twierdzenie (2) wyraża przekonanie, że nie każdy możliwy stan rzeczy zachodzi, innymi słowy, nie każde zdanie możliwe jest prawdziwe. Twierdzenie (2) stanowi odpowiednik scholastycznej zasady: *a posse ad esse non valet consequentia formalis*. Twierdzenie (2) wynika z indeterministycznego poglądu na świat, mianowicie z przekonania o istnieniu przygodnych stanów rzeczy.

5 Zob. idem, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań…*, s. 276.

6 Zob. idem, *System logiki modalnej…*, Warszawa 1961, s. 275.

W starożytnej filozofii gorącym obrońcą tego przekonania był Arystoteles, którego indeterministyczne poglądy stanowiły główne źródło dla badań Łukasiewicza w zakresie logik wielowartościowych. Twierdzenie (3) głosi, że nie każdy stan rzeczy, opisywalny za pomocą zdania, jest możliwy, czyli istnieją zdania, które opisują niemożliwe stany rzeczy. Komentując to twierdzenie, Łukasiewicz stwierdza, że odróżnia ono funktor możliwości od funktora tautologii *tlg*. W klasycznym rachunku zdań zdanie zbudowane za pomocą funktora tautologii jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznej argumentu tego funktora. Utożsamienie funktora modalnego z funktorem tautologii powoduje zanik rozróżnień modalnych (*collapsing*), co prowadzi do tego, że logika modalna, z takim utożsamieniem, jest logiką zawartą w klasycznym rachunku zdań.

Kolejne trzy twierdzenia, w pewnym sensie dualne względem poprzedniej trójki, dotyczą własności funktora konieczności:

$$\vdash \Box p \to p \tag{4}$$
$$\dashv p \to \Box p \tag{5}$$
$$\dashv \neg\Box p \tag{6}$$

Twierdzenie (4) oznacza, że każdy konieczny stan rzeczy zachodzi, innymi słowy każde zdanie konieczne jest prawdziwe. Twierdzenie (4) stanowi odpowiednik scholastycznej zasady: *a neccesse ad esse valet consequentia formalis*. Twierdzenie (5) głosi, że nie każdy zachodzący stan rzeczy jest konieczny. Inaczej nie każde zdanie prawdziwe jest konieczne. Twierdzenie (5) stanowi odpowiednik scholastycznej zasady: *ad esse a neccesse non valet consequentia formalis*. Twierdzenie (5), podobnie jak twierdzenie (2), wynika z indeterministycznego poglądu na świat. Na gruncie regularnych logik modalnych twierdzenia te są nawet sobie równoważne. Twierdzenie (6) głosi, że istnieje co najmniej jeden konieczny stan rzeczy, a dokładniej, że nie każdy stan rzeczy jest niekonieczny. Innymi słowy istnieją zdania koniecznie prawdziwe. Łukasiewicz podkreśla, że twierdzenie (6) ma zabezpieczyć funktor konieczności przed utożsamieniem z funktorem antylogii. Podobnie jak utożsamienie funktora możliwości z funktorem tautologii, również utożsamienie funktora możliwości z funktorem antylogii prowadziłoby do zaniku rozróżnień modalnych i do budowy logiki modalnej zawartej w klasycznym rachunku zdań.

Trzeba zaznaczyć, że mówiąc o twierdzeniach (4) i (5), Łukasiewicz cytuje inne scholastyczne zasady niż te, które wyżej podałem. Mianowicie (4) utożsamia ze scholastyczną zasadą: *ab oportere ad esse valet consequentia*, a twierdzenie (5) z zasadą: *ab esse ad oportere non valet consequentia*. Nie jest to utożsamienie całkiem dokładne, ponieważ rzeczownik odczasownikowy „*oportere*" sugeruje konieczność deontyczną, czyli powinność. Przy takim rozumieniu funktora konieczności twierdzenie (4) powinno byłoby zostać odrzucone. Akceptacja twierdzenia (1) i twierdzenia (4) sugerują aletyczny sens funktorów modalnych, związany z takimi pojęciami, jak konieczność logiczna, konieczność fizyczna, konieczność metafizyczna. Wydaje się, że ten sens funktora konieczności jest oddany lepiej za pomocą wyrazu „*necesse*" niż „*oportere*".

Ostatnie dwa twierdzenia, na których opiera się podstawowa logika modalna, opisują zależność między funktorami konieczności i możliwości:

$$\vdash \Diamond p \equiv \neg\Box\neg p, \tag{7}$$

$$\vdash \Box p \equiv \neg\Diamond\neg p. \tag{8}$$

Zgodnie z pierwszym z tych twierdzeń, stan rzeczy opisywany przez pewne zdanie jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy stan rzeczy opisywany przez negację tego zdania nie jest konieczny. Zgodnie z drugim stwierdzeniem stan rzeczy opisywany przez pewne zdanie jest konieczny wtedy i tylko wtedy, gdy stan rzeczy opisywany przez negację tego zdania nie jest możliwy. W odniesieniu do tych dwóch twierdzeń Łukasiewicz stwierdza tylko, że „są to oczywiste związki między możliwością a koniecznością". Warto dodać, że akceptacja tych dwóch twierdzeń przesądza o tym, że mamy do czynienia z funktorem możliwości jednostronnej. Przy takim rozumieniu funktora możliwości każde zdanie konieczne i każde zdanie prawdziwe jest tym bardziej możliwe. W filozofii starożytnej i średniowiecznej rozważano również możliwość dwustronną, którą utożsamia się z przygodnością. Przy takim rozumieniu możliwości zdania dzielą się na konieczne, możliwe i niemożliwe. W systemach ścisłej implikacji Lewis również posłużył się funktorem możliwości jednostronnej, który stał się standardowy dla całej dwudziestowiecznej logiki modalnej. Łukasiewicz zwraca uwagę na to, że wszystkie przytoczone stwierdzenia podstawowej logiki modalnej, z wyjątkiem (3) i (6), można znaleźć w pracach dawniejszych logików, tj. logików starożytnych i średniowiecznych. Poniżej zamieszczam algebrę spójników modalnych odpowiadającą powyższym wymogom podstawowego systemu modalnego. Algebra została opisana za pomocą kraty przedstawionej na poniższym schemacie. Strzałka wyznacza relacje porządkującą. Ilekroć strzałka prowadzi od wyrażenia A do wyrażenia B, znaczy to, że na gruncie podstawowej logiki modalnej oraz każdej logiki modalnej w rozumieniu Łukasiewicza: (a) zdanie B jest wyprowadzalne ze zdania A, (b) zdanie A nie jest wyprowadzalne ze zdania B. Strzałka prowadzi więc zawsze od wyrażenia mocniejszego do wyrażenia słabszego. Dla każdej pary wyrażeń kresem górnym jest wyrażenie znajdujące się wyżej w schemacie, natomiast kresem dolnym wyrażenie, które znajduje się niżej.

$$\begin{array}{ll}
p \vee \neg p & \\
\uparrow & (3) \\
\Diamond p & \\
\uparrow & (1) \text{ i } (2) \\
p & \\
\uparrow & (4) \text{ i } (5) \\
\Box p & \\
\uparrow & (6) \\
p \wedge \neg p. &
\end{array}$$

Automatyzując podstawową logikę modalną jako terminy pierwotne, Łukasiewicz przyjmuje funktory negacji, implikacji i możliwości. Aksjomatami są wyrażenia: (1)–(3) oraz wyrażenie:

$$\vdash \Diamond p \equiv \Diamond \neg\neg p. \tag{9}$$

Wyrażenie (9) jest równoważne z wyrażeniem (7) na gruncie podstawowej logiki modalnej.

Funktor konieczności jest terminem wtórnym, a funkcję definicji pełni wyrażenie (8). Regułami pierwotnymi są reguła podstawiania dla wyrażeń uznanych:

$$\frac{\vdash A}{\vdash eA,} \tag{10}$$

reguła podstawiania dla wyrażeń odrzuconych:

$$\frac{\dashv eA}{\dashv A,} \tag{11}$$

reguła *modus ponens* dla wyrażeń uznanych:

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash B,} \tag{12}$$

reguła *modus ponens* dla wyrażeń odrzuconych:

$$\frac{\vdash A \to B \qquad \dashv B}{\dashv A.} \tag{13}$$

W powyższych regułach *eA* oznacza dowolne podstawienie zdania *A*. Choć Łukasiewicz wprost tego nie mówi, przebieg przeprowadzonych przez niego dowodów wskazuje na to, że aksjomatami podstawowej logiki modalnej są ponadto podstawienia twierdzeń klasycznego rachunku zdań. Łukasiewicz podaje dowód niezależności aksjomatów: (1)–(3) i (9).

Podstawową logikę modalną można zaksjomatyzować alternatywnie ze spójnikiem konieczności jako terminem pierwotnym zamiast spójnika możliwości. Aksjomatami są wówczas twierdzenia: (4)–(6) oraz twierdzenie:

$$\vdash \Box p \equiv \Box\neg\neg p, \tag{14}$$

które na gruncie podstawowej logiki modalnej jest równoważne z twierdzeniem (8). Funktor możliwości, który jest wtedy terminem wtórnym, definiuje się za pomocą twierdzenia (7). Reguły procedury dowodowej pozostają niezmienione. Podstawowy system określa minimalne wymogi, jakie musi spełniać dowolny inny system, aby być uznanym za modalny. Taki system modalny zdaniem Łukasiewicza pozwalał na wyrażanie wspomnianej już modalności aletycznej.

3. Prawa ekstensjonalności dla funktorów modalnych

System logiki Ł-modalnej powstaje poprzez dołączenie do podstawowej logiki modalnej prawa ekstensjonalności dla funktorów modalnych. Prawo ekstensjonalności, kolejno dla funktora możliwości i konieczności, ma następującą postać:

$$(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q), \tag{15}$$
$$(p \to q) \to (\Box p \to \Box q). \tag{16}$$

Dla uzyskania systemu Ł-modalnego wystarczy do podstawowej logiki modalnej dodać jedno z wymienionych praw, w zależności od tego, który funktor jest terminem pierwotnym. Drugie prawo ekstensjonalności jest wówczas wyprowadzalne na podstawie praw klasycznego rachunku zdań i odpowiednio definicji funktora konieczności lub możliwości[7]. Przyjęcie praw ekstensjonalności dla funktorów modalnych stanowi wyraz przekonania Łukasiewicza, że funktory możliwości i konieczności są ekstensjonalne.

7 Por. idem, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań…*

4. Matryca logiki Ł-modalnej

Matryca, jaką Łukasiewicz tworzy na potrzeby swojego nowego systemu logiki modalnej, powstaje poprzez pomnożenie przez siebie dwóch matryc klasycznego rachunku zdań[8]. Są to matryce o tej samej zawartości jak te, które charakteryzują klasyczny rachunek zdań[9]. Wyglądają one następująco:

$$M^{\bullet}_{cl} = \langle\{1, 0\}, afm, tlg, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \{1\}^{*}\rangle, \quad (17)$$

$$M^{\circ}_{cl} = \langle\{1, 0\}, tlg, afm, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \{1\}^{*}\rangle, \quad (18)$$

gdzie symbole „*tlg*", „*afm*" oraz „*alg*" oznaczają kolejno jednoargumentowe funktory klasycznego rachunku zdań, tj. funktor tautologii (*verum*), funktor afirmacji (*asercje*) oraz funktor antylogii (*falsum*). Wraz z negacją funktory te stanowią wszystkie cztery jednoargumentowe funktory definiowalne w klasycznym rachunku zdań. Działania odpowiadające tym funktorom obrazuje tab. 1.

Tabela 1. Jednoargumentowe operacje klasycznego rachunku zdań

	tlg
1	1
0	1

	afm
1	1
0	0

	¬
1	0
0	1

	alg
1	0
0	0

Po pomnożeniu przez siebie dwóch matryc dwuwartościowych klasycznego rachunku zdań otrzymujemy w rezultacie matrycę M_{L4}, której wartościami są uporządkowane pary wartości matrycy klasycznej: ⟨1, 1⟩, ⟨1, 0⟩, ⟨0, 1⟩, ⟨0, 0⟩. Wartością wyróżnioną jest tutaj wartość ⟨1, 1⟩. Wartość ⟨1, 1⟩ pojmowana jest jako prawda, wartość ⟨0, 0⟩ jako fałsz, a wartości ⟨1, 0⟩ oraz ⟨0, 1⟩ jako możliwość. W dalszej części artykułu, dla skrótu, wartości te będą zapisywane odpowiednio jako: 11, 10, 01, 00.

Matryce $M^{\bullet}_{cl}$ oraz M°_{cl} różnią się między sobą jedynie kolejnością operacji *afm* i *tlg*. W konsekwencji ich pomnożenie po kartezjańsku, które nie jest operacją przemienną, daje matrycę, która zachowuje klasyczność funktorów negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności, a ponadto zawiera operacje charakteryzujące funktory, tj. „$\Diamond^{\bullet}$" oraz „$\Diamond^{\circ}$". Operacje te różnią się tylko kolejnością współrzędnych: operacja charakteryzująca „$\Diamond^{\bullet}$" stanowi produkt afirmacji przez tautologie, a operacja charakteryzująca „$\Diamond^{\circ}$" stanowi produkt tautologii przez afirmacje. Przypomnijmy, że produkt kartezjański nie jest działaniem przemiennym. Operacje matrycy M_{L4} przedstawia tab. 2.

8 Por. idem, *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii...*

9 Por. M. Tkaczyk, *Futura Contingentia*, Lublin 2015.

Tabela 2. Operacje czterowartościowej logiki modalnej Łukasiewicza

	$\Diamond^{\bullet}$
11	11
10	11
01	01
00	01

	$\Diamond^{\circ}$
11	11
10	10
01	11
00	10

	$\Box^{\bullet}$
11	10
10	10
01	00
00	00

	$\Box^{\circ}$
11	01
10	00
01	01
00	00

	$\neg$
11	00
10	01
01	10
00	11

$\rightarrow$	1 1	1 0	0 1	0 0	$\vee$	1 1	1 0	0 1	0 0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0

$\wedge$	1 1	1 0	0 1	0 0	$\equiv$	1 1	1 0	0 1	0 0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Osobliwością matrycy $M_{Ł4}$ jest istnienie dwóch wartości interpretowanych jako możliwość. Dzięki temu Łukasiewicz może używać dwóch funktorów możliwości: „$\Diamond^{\bullet}$" oraz „$\Diamond^{\circ}$", zwanych możliwościami bliźniaczymi. Jeżeli dwa wyrażenia zawierają tylko jeden funktor możliwości, a ponadto różnią się tylko tym, że w miejscu wystąpienia jednego funktora możliwości w pierwszym wyrażeniu, w drugim wyrażeniu występuje drugi funktor możliwości, to bądź obydwa wyrażenia są tautologiami, bądź żadne. Taka wymienialność funktorów możliwości nie zachodzi dla wyrażeń, w których występują oba te funktory. Podobnie o bliźniętach mówi się, że można je rozróżnić, gdy stoją obok siebie, ale są nierozróżnialne, kiedy występują oddzielnie.

Wprowadzenie dwóch funktorów możliwości służy rozwiązaniu problemu Gonsetha przy zachowaniu prawa ekstensjonalności[10].

10 Por. ibidem.

5. Interpretacja logiki Ł-modalnej w klasycznym rachunku zdań

Josep Maria Font i Petr Hájek[11] wskazali na ścisłą zależność między tautologiami logiki modalnej a tautologiami klasycznego rachunku zdań: *Wyrażenie, które nie zawiera funktorów modalnych, jest tautologią logiki Ł-modalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono tautologią klasycznego rachunku zdań.*

Należy teraz zauważyć, że operacje charakteryzujące funktory modalne matrycy M_{L4} mogą być dane jako superpozycje operacji charakteryzujących w tej matrycy funktory klasycznego rachunku zdań. Niech $u, v \in \{1, 0\}$. Operacje charakteryzujące funktory modalne dane są wówczas następującymi wzorami:

$$\Box(uv) = 10 \wedge uv = u0, \tag{19}$$
$$\Diamond(uv) = 01 \vee uv = 10 \rightarrow uv = u1. \tag{20}$$

Font i Hájek określają translację φ^* dowolnego wyrażenia φ języka Ł-modalnego. Niech L będzie ustaloną zmienną zdaniową, która nie występuje w żadnym wyrażeniu systemu Ł-modalnego. Wówczas

$$p^* = p, \tag{21}$$

dla dowolnej zmiennej zdaniowej p z języka systemu Ł-modalnego. W odniesieniu do spójników klasycznego rachunku zdań obowiązują zależności:

$$(\neg\varphi)* = \neg_{\varphi}{}^*, \tag{22}$$
$$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*, \tag{23}$$
$$(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*, \tag{24}$$
$$(\varphi \rightarrow \psi)^* = \varphi^* \rightarrow \psi^*, \tag{25}$$
$$(\varphi \equiv \psi)^* = \varphi^* \equiv \psi^*, \tag{26}$$

dla dowolnych wyrażeń φ, ψ języka systemu Ł-modalnego. W odniesieniu do spójników modalnych obowiązują następujące zależności:

$$(\Box\varphi)^* = L\wedge_{\varphi}*, \tag{27}$$
$$(\Diamond\varphi)^* = L \rightarrow_{\varphi}*, \tag{28}$$

dla dowolnego wyrażenia φ języka systemu Ł-modalnego oraz – jak pamiętamy – dla L będącego jedną wybraną i ustaloną zmienną zdaniową, niewystępującą w żadnym wyrażeniu języka systemu Ł-modalnego.

11 Por. J.M. Font, P. Hájek, *On Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic*, „Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic" 70 (2002) 2, s. 157–182.

Zauważmy, że dla dowolnego wyrażenia φ języka systemu Ł-modalnego φ^* jest wyrażeniem klasycznego rachunku zdań. Font i Hájek udowodnili następujące twierdzenie: *wyrażenie* φ *jest tautologią matrycy* M_{L4} *wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie* φ^* *jest wyrażeniem klasycznego rachunku zdań (matrycy klasycznej).* Jest oczywiste, że powyższe twierdzenie daje zarazem metodę rozstrzygania dla wyrażeń system Ł-modalnego.

6. Semantyka relacyjna logiki Ł-modalnej

Semantykę relacyjną logiki Ł-modalnej opracował Edward John Lemmon. Jest to semantyka dla logiki regularnej. Struktura modelowa F jest to układ:

$$\mathrm{F} = \langle W, Q, R \rangle, \tag{29}$$

w którym W jest to dowolny zbiór, a ponadto $W \neq \emptyset$, $Q \subseteq W$, $R \subseteq W \times W$.

Zbiór W rozumiemy jako zbiór światów możliwych. Zbiór Q jest to zbiór dziwnych światów możliwych (*queer*), w których każde zdanie jest możliwe, ale żadne nie jest konieczne. Z kolei R jest to relacja dostępności między światami możliwymi, przy czym zamiast xRy można pisać $y \in R(x)$.

Model M nad strukturą F jest to układ

$$\mathrm{M} = \langle W, Q, R, V \rangle, \tag{30}$$

w którym W, Q, R składają się na strukturę modelową F, a V jest funkcją przekształcającą zbiór wyrażeń systemu Ł-modalnego w zbiór $\wp(W)$. Dla dowolnego $x \in W$ stwierdzenie $x \in V(\varphi)$ znaczy, że wyrażenie φ jest prawdziwe w świecie możliwym x. Dla funktorów klasycznego rachunku zdań funkcja V spełnia standardowe warunki:

$$x \in V(\neg\varphi) \text{ wtw } x \notin V(\varphi), \tag{31}$$
$$x \in V(\varphi \wedge \psi) \text{ wtw } x \in V(\varphi) \text{ oraz } x \in V(\psi), \tag{32}$$
$$x \in V(\varphi \vee \psi) \text{ wtw } x \in V(\varphi) \text{ lub } x \in V(\psi), \tag{33}$$
$$x \in V(\varphi \to \psi) \text{ wtw } x \notin V(\varphi) \text{ lub } x \in V(\psi), \tag{34}$$
$$x \in V(\varphi \equiv \psi) \text{ wtw } x \in V(\varphi) \cap V(\psi) \text{ lub } x \notin V(\varphi) \cup V(\psi). \tag{35}$$

Dla funktorów modalnych obowiązują warunki typowe dla logik regularnych:

$$x \in V(\Box\varphi) \text{ wtw jeżeli } x \notin Q \text{ i } \forall y \in R(x), y \in V(\varphi), \tag{36}$$
$$x \in V(\Diamond\varphi) \text{ wtw jeżeli } x \in Q \text{ lub } \exists y \in R(x), y \in V(\varphi). \tag{37}$$

Oczywiście o specyfice semantyki decydują warunki nakładane na relację dostępności *R*:

$$xRy \to x = y, \tag{38}$$
$$x \notin Q \to xRx. \tag{39}$$

Przytoczone warunki Lemmona znaczą, że żaden świat nie widzi światów różnych od siebie, a każdy świat, który nie jest dziwny, widzi siebie.

Wyrażenie jest prawdziwe w modelu wtedy i tylko wtedy, gdy jest możliwe w każdym świecie możliwym tego modelu. Wyrażenie jest prawdziwe w strukturze modelowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w każdym modelu nad tą strukturą. Wyrażenie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w każdej strukturze modelowej. Udowodniono, że wyrażenie języka systemu Ł-modalnego jest prawdziwe w powyższym sensie wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono tautologią matrycy M_{L4}.

7. Aksjomatyzacje logiki Ł-modalnej

Aksjomatyka Łukasiewicza. Aksjomatyka przyjęta przez Łukasiewicza w pracy *System logiki modalnej* składa się z dwóch następujących aksjomatów wraz z regułą *modus ponens* oraz regułą podstawiania:

$$\vdash \delta\, \mathrm{p} \to (\delta \neg p \to \delta q), \tag{40}$$
$$\vdash p \to \Diamond p. \tag{41}$$

Jednocześnie w skład tej aksjomatyki wchodzą kolejne dwa wyrażenia odrzucone wraz z regułą odwróconego podstawiania oraz odwróconą regułą *modus ponens*.

$$\dashv (\Diamond p \to p), \tag{42}$$
$$\dashv \Diamond p. \tag{43}$$

Używamy symbolu możliwość, ponieważ te same aksjomaty dotyczą funktorów „$\Diamond^{\bullet}$”, jak i „$\Diamond^{\circ}$”.

Na szczególną uwagę zasługuje tutaj aksjomat (40). Wyrażenie to, zaczerpnięte z protetyki Leśniewskiego, zostało użyte przez Łukasiewicza już w tekście z 1930 roku do wykazania, iż formalizacja trzeciego twierdzenia o zdaniach modalnych, w rozszerzonym rachunku zdań, prowadzi do paradoksalnych, zdaniem Łukasiewicza, wniosków. Carew Arthur Meredith udowodnił możliwość zaksjomatyzowania klasycznego rachunku zdań ze zmiennymi funktorami za pomocą jedynie wyrażenia (40). Kluczowe jest jednak założenie Łukasiewicza, że zmienna funktorowa δ odnosi się również do funktorów modalnych. W praktyce oznacza to, że Łukasiewicz przy tworzeniu systemu Ł-modalnego uznał funktory modalne za funktory prawdziwościowe. Jest to sprzeczne z wynikami jego wcześniejszej pracy *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*, w której argumentował, iż funktory modalne nie są funktorami prawdziwościowymi.

Widać tutaj, że Łukasiewicz w praktyce posługuje się wymiennie dwoma pojęciami ekstensjonalności (prawdziwościowości). Przy jednym rozumieniu ekstensjonalność sprowadza się do możliwości scharakteryzowania za pomocą matrycy logicznej. Przy takim rozumieniu ekstensjonalności Łukasiewicz przyjął wspomniane wyżej prawa ekstensjonalności dla funktorów modalnych. Drugie rozumienie ekstensjonalności równa się posiadaniu charakterystyki w matrycy dwuwartościowej. Przy takim rozumieniu zasadne jest przyjęcie aksjomatu Mereditha. Wydaje się, że ten błąd jest odpowiedzialny za wszystkie nietypowe własności systemu Ł-modalnego.

Aksjomatyka Lemmona. Aksjomatyka, która uznawana jest za standardową dla logiki czterowartościowej, to ta opublikowana w 1966 r. przez Edwarda Johna Lemmona. Jest ona oparta, wbrew temu, co oryginalnie robił Łukasiewicz, jedynie na zdaniach, które są uznawane za prawdziwe, i nie zawiera aksjomatów wyrażających twierdzenia odrzucone. Lemmon przyjmuje trzy aksjomaty specyficzne:

$$\Box(p \to q)\to(\Box p \to \Box q), \tag{44}$$
$$\Box p \to q, \tag{45}$$
$$\Box p \to (q \to \Box q). \tag{46}$$

Za reguły inferencyjnie przyjmuje się regułę podstawiania oraz *modus ponens*, natomiast spójnik możliwości definiuje się w następujący sposób:

$$\ulcorner \Diamond\varphi \urcorner =^{\text{def}} \ulcorner \neg\Box\neg\varphi \urcorner. \tag{47}$$

W 2011 r. Marcin Tkaczyk zauważył ponadto, że aksjomat pierwszy, który w niniejszym tekście jest oznaczony numerem (44), można wyprowadzić z pozostałych dwóch aksjomatów specyficznych znajdujących się pod numerami (45) i (46).

Aksjomatyka Kripkego. Kolejną aksjomatyką jest przedstawiona 1963 r. przez Saula Kripkego, która składa się z dwóch poniższych aksjomatów specyficznych oraz reguły *modus ponens*:

$$\Box p \to p, \tag{48}$$
$$(p \to q) \to (\Box p \to \Box q). \tag{49}$$

Funktor możliwości definiuje się jak w definicji (47).

Aksjomatyka Tkaczyka. Możliwe jest też opisanie alternatywnej aksjomatyki, która będzie zawierała tylko jeden aksjomat specyficzny, taką propozycję wysunął

Marcin Tkaczyk. Aksjomat, jaki zaproponował, nazywany jest aksjomatem skaczącej konieczności:

$$\Box p \wedge q \rightarrow p \wedge \Box q. \tag{50}$$

Jak zwykle funktor możliwości definiowany jest za pomocą definicji (47).

Aksjomatyka Dywana. Podobną propozycję ujęcia systemu logiki czterowartościowej przy użyciu tylko jednego aksjomatu specyficznego wysunął Zdzisław Dywan. Zaproponował on następujący aksjomat:

$$\Box p \rightarrow (q \equiv \Box q). \tag{51}$$

Również tutaj (47) definiuje funktor możliwości.

Aksjomatyka z użyciem funktora trójargumentowego. Istnieje możliwość utworzenia aksjomatyki logiki Ł-modalnej za pomocą funktora trójargumentowego. Wspomniany funktor trójargumentowy będziemy oznaczać za pomocą $\odot$ i scharakteryzujemy go za pomocą tab. 3. Zbiór poprawnie zbudowanych wyrażeń rozszerzymy o wyrażenie powstałe przy użyciu tego funktora tak, że jeśli φ, ω i μ należą do tego zbioru, to wyrażenie o postaci $\odot(\varphi, \omega, \mu)$ również do niego należy. Funktor ten jest definiowalny na gruncie klasycznego rachunku zdań za pomocą formuły:

$$\odot(\varphi, \omega, \mu) = \varphi \rightarrow (\omega \equiv \mu). \tag{52}$$

Za pomocą funktora $\odot$ i funktora negacji można zdefiniować wszystkie funktory klasycznego rachunku zdań. W szczególności:

$$tlg(p) =^{\mathrm{def}} \odot(p, p, p), \tag{53}$$
$$p \rightarrow q =^{\mathrm{def}} \odot(p, q, p), \tag{54}$$
$$p \equiv q =^{\mathrm{def}} \odot(p, q, tlg(p)), \tag{55}$$
$$p \wedge q =^{\mathrm{def}} \neg p \equiv p \rightarrow q, \tag{56}$$
$$p \vee q =^{\mathrm{def}} \neg p \rightarrow q. \tag{57}$$

Przyjmujemy więc, że terminami pierwotnymi są: $\Box$, $\neg$, $\odot$. Przyjmujemy tylko jeden aksjomat specyficzny:

$$\odot(p, \Box p, \Box q). \tag{58}$$

Zamiast reguły *modus ponens* przyjmujemy następującą regułę:

$$\frac{\begin{array}{l}\odot(\varphi, \psi, \varphi)\\ \varphi\end{array}}{\psi,} \tag{59}$$

a także regułę podstawiania i regułę (47) definiującą funktor możliwości.

Tabela 3. Charakterystyka funktora trójwartościowego ⊙

⊙		μ			
φ	ω	1 1	1 0	0 1	0 0
	1 1	1 1	1 0	0 1	0 0
1 1	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 0 0	0 0 1 1	0 1 1 0
	0 0	0 0	0 1	1 0	1 1
	1 1	1 1	1 1	0 1	0 1
1 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 1 1 1	0 1 1 1
	0 0	0 1	0 1	1 1	1 1
	1 1	1 1	1 0	1 1	1 0
0 1	1 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 1 0
	0 0	1 0	1 1	1 0	1 1
	1 1	1 1	1 0	1 1	1 1
0 0	1 0 0 1	1 0 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 0
	0 0	1 1	1 1	1 0	1 1

Zaproponowana tutaj aksjomatyka jest adekwatna. Aby to udowodnić, wystarczy zauważyć, że z aksjomatu (58) jest w oczywisty sposób wyprowadzalny aksjomat Dywana (51), a z naszej reguły (59) wyprowadzalna jest w oczywisty sposób reguła *modus ponens*.

8. Porównanie aksjomatyk

Biorąc pod uwagę sposób budowy, trzeba zauważyć, że aksjomatyka Łukasiewicza jako jedyna skonstruowana jest przy użyciu zarówno wyrażeń uznanych, jak i wyrażeń odrzuconych. Jak udowodnił Tkaczyk, aksjomatyka Lemmona nie ma cechy niezależności[12]. Pozostałe aksjomatyki, które omówiliśmy, tę cechę posiadają.

Ostatnią cechą aksjomatyk, na którą chcę zwrócić uwagę przy ich analizie, jest kwestia ich długości. Długość aksjomatu może być rozumiana na dwa sposoby. Pierwszy z nich zakłada, że każdy funktor użyty przy konstrukcji aksjomatu liczony jest bezpośrednio jako pojedynczy znak. Drugi sposób wprowadza przy analizie długości aksjomatów podział na funktory pierwotne oraz wtórne. Funktory pierwotne liczone są jako pojedynczy znak. W przypadku użycia funktorów wtórnych traktowane są one jako skróty wyrażeń złożonych z funktorów pierwotnych. Oznacza to, że ocena liczby znaków odbywa się dopiero po przeformułowaniu wyrażenia zawierającego funktory wtórne na wyrażenie składające się jedynie z funktorów pierwotnych.

Większość wspomnianych wyżej aksjomatyk nie używała jedynie funktorów pierwotnych dla implikacyjno-negacyjnego systemu rachunku zdań, jakim posługiwał się Łukasiewicz, ale również funktorów wtórnych. Ponieważ twórcy wspomnianych aksjomatyk nie wskazują wyraźnie, które funktory klasycznego rachunku zdań są pierwotne, przyjmiemy za Łukasiewiczem, że są to funktory: negacji, implikacji i konieczności. Po zapisaniu za pomocą tych funktorów aksjomatu Tkaczyka (50), aksjomatu Dywana (51) i naszego aksjomatu (58), przyjmują one kolejno następujący kształt:

$$\neg(\neg\Diamond\neg p \to \neg q) \to \neg(\neg\Diamond\neg q \to \neg p), \tag{60}$$

$$\neg\Diamond\neg p \to \neg((\neg\Diamond\neg q \to q) \to \neg(q \to \neg\Diamond\neg q)), \tag{61}$$

$$\neg(\neg\Diamond\neg q \to ((p \to \neg\Diamond\neg q) \to \neg(\neg p \to \Diamond\neg p))). \tag{62}$$

Jak widać, przy takiej formie zapisu aksjomat Tkaczyka składa się z 17 znaków, aksjomat Dywana z 20 znaków i nasz aksjomat również z 20 znaków. Aksjomat Tkaczyka okazuje się w tym układzie najkrótszy. Jeśli jednak funktory wtórne wolno liczyć za jeden, tak jak funktory pierwotne, to aksjomat (50) składa się z 9 znaków, aksjomat (51) z 7 znaków, a nasz aksjomat (58) z 6 znaków. Najkrótszy w takim układzie okazuje się nasz aksjomat (58).

12 Por. M. Tkaczyk, *On Axiomatization of Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic…*, s. 215–232.

Bibliografia

Dywan Z., *Najkrótsze aksjomaty modalnej logiki Łukasiewicza*, „Roczniki Filozoficzne" 64 (2016) 2, s. 5–9.

Font J.M., Hájek P., *On Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic*, „Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic" 70 (2002) 2, s. 157–182.

Lemmon E.J., *Algebraic Semantics for Modal Logics*, „The Journal of Symbolic Logic" 31 (1966) 2, s. 191–218.

Łukasiewicz J., *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii – pisma wybrane*, PWN, Warszawa 1961.

Łukasiewicz J., *System logiki modalnej*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii – pisma wybrane*, PWN, Warszawa 1961.

Łukasiewicz J., *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*, w: J. Słupecki (red.), *Z zagadnień logiki i filozofii – pisma wybrane*, PWN, Warszawa 1961.

Tkaczyk M., *Futura Contingentia*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2015.

Tkaczyk M., *On Axiomatization of Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic*, „Logic and Logical Philosophy" 20 (2011) 3, s. 215–232.

AKSJOMATYZACJA CZTEROWARTOŚCIOWEJ LOGIKI MODALNEJ ŁUKASIEWICZA

Streszczenie

Przedmiotem artykułu jest aksjomatyzacja logiki Ł-modalnej Jana Łukasiewicza. Logika ta jest ściśle regularną, czterowartościową logiką modalną, której matryca jest produktem dwóch różnych matryc klasycznego rachunku zdań. Logika Ł-modalna wyrasta wprost z dyskusji filozoficznych i badań logicznych prowadzonych w szkole lwowsko-warszawskiej, które to dotyczyły zmienności wartości logicznych w czasie, wartości logicznych zdań opisujących przyszłe zdarzenia przygodne oraz modalności temporalnych. Artykuł ten ma dostarczyć przeglądu aksjomatyk tejże logiki, a następnie wskazać na zachodzące pomiędzy nimi podobieństwa i różnice. W tym celu skupię się najpierw na omówieniu cech takich, jak niezależność, prostota i liczba użytych symboli, a następnie dokonam za ich pomocą analizy oraz porównania wybranych aksjomatyk. Analiza sama w sobie będzie dotyczyć następujących aksjomatyk: (a) oryginalnej aksjomatyki Łukasiewicza, zawierającej zmienną funktorową δ; (b) aksjomatyki Lemmona; (c) aksjomatyki Kripkego; (d) aksjomatyki Dywana; (e) aksjomatyki Tkaczyka z tzw. aksjomatem skaczącej konieczności; oraz (f) aksjomatyki zawierającej funktor trójwartościowy.

Słowa kluczowe: logika modalna, Łukasiewicz, aksjomatyzacje

Nota autorska

Mateusz Lisowski – doktorant na Wydziale Filozofii Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II; adres: Aleje Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: malisowski94@gmail.com.

Cytowanie

Lisowski M., *Aksjomatyzacja czterowartościowej logiki modalnej Łukasiewicza*, „Colloquia Theologica Ottoniana" 39 (2023), s. 173–191. DOI: 10.18276/cto.2023.39-08.