„Analiza i Egzystencja” 63 (2023), 55–87
ISSN (print): 1734-9923
ISSN (online): 2300-7621
DOI: 10.18276/aie.2023.63-03

ARTYKUŁY

PIOTR DEHNEL
ORCID: 0000-0002-6958-6148
Pomorska Szkoła Wyższa w Starogardzie Gdańskim
e-mail: piotrdehnel@wp.pl

Gramatyka nieskończoności. Ludwiga Wittgensteina krytyka teorii mnogości*

Słowa kluczowe: Cantor, Dedekind, język, teoria mnogości, nieskończoność, dowód diagonalny

Keywords: Cantor, Dedekind, language, set theory, infinity, diagonal proof

Grammar of Infinity. Wittgenstein's Critique of Set Theory

Abstract

The paper discusses a relatively underexamined element of Wittgenstein's philosophy of mathematics associated with his critique of set theory. I outline Wittgenstein's objections to the theories of Dedekind and Cantor, including the confounding of extension and intension, the faulty definition of the infinite set as infinite extension and the critique of Cantor's diagonal proof. One of Wittgenstein's major objections to set theory was that the concept of the size of infinite sets, which Cantor expressed by means of symbols $\aleph_0$ and $\mathbf{c}$, had no application, i.e., that there was no grammatical technique that could show how such expressions were to be used. Notions of set theory are, so to speak, exterior – they find themselves outdoors, outside of what we usually do. They form a discourse that takes us beyond the horizon of everydayness and commonality. They are like an engine idling of the language of mathematics.

* Serdecznie dziękuję prof. R. Murawskiemu oraz prof. T. Zarębskiemu za lekturę i krytyczne uwagi do pierwotnej wersji tekstu.

Wprowadzenie

Po powrocie do Cambridge w roku 1929, który był zarazem powrotem do filozofii, Wittgenstein intensywnie zajmował się filozofią matematyki, do czego z pewnością przyczyniły się dyskusje z Frankiem Ramseyem, które rozszerzyły też intelektualny horyzont omawianych problemów. Podczas gdy w okresie *Traktatu* punktem odniesienia dla filozofii logiki i matematyki Wittgensteina pozostawał logicyzm Russella i Fregego, to w okresie przejściowym w jego notatkach pojawiają się takie nazwiska, jak Skolem, Hilbert, Weyl, Brouwer, Dedekind czy Cantor. W lekturze tych notatek uderzać może jednoznaczna, nieprzejednana i bardzo ostra krytyka poglądów dwóch ostatnich z wymienionych matematyków i w ogóle całej teorii mnogości. Wittgenstein pisze o niej, że jest „fałszywa" (*falsch*) (MS 106, s. 155; PR § 145), że „matematyka jest całkowicie zanieczyszczona przez szkodliwe (*perniciöse*) wyrażenia teoriomnogościowe" (MS 106, s. 251), że jest po prostu „paplaniną" (*Geschwätz*) (BT, s. 747). Swojego negatywnego stanowiska nie zmienił także w powstałych w latach 1937–1944 *Uwagach o podstawach matematyki*, w których pisał między innymi: „Wierzę i mam nadzieję, że przyszłe pokolenia będą się śmiać z tego hokus-pokus" (UPM II, s. 22), albo: „Wyobraź sobie, że teorię mnogości wynalazł satyryk jako rodzaj parodii matematyki. – Później jednak dostrzeżono w niej pewien sens i włączono ją do matematyki. (Skoro bowiem ktoś może ją uważać za raj matematyków, dlaczego ktoś inny nie miałby jej uważać za żart?)" (UPM V, s. 7). W ostatniej wypowiedzi o teorii mnogości z *Uwag* uznał ją w końcu za coś, co „przypomina nowotwór, bez celu i sensu wyrastający z normalnego ciała" (UPM VII, s. 11).

Zaskakuje kategoryczny ton krytyki, a przede wszystkim czas, w którym została przeprowadzona, czyli lata 30. i 40. ubiegłego wieku, kiedy teoria mnogości była już dobrze ugruntowaną dziedziną matematyki. W ogóle pierwsze ćwierćwiecze XX wieku było okresem tryumfu metod i pojęć teorii mnogości, a niektórzy widzieli w niej przewrót w matematyce nieznany od czasów Newtona i Leibniza[1].

Cel tego artykułu jest historyczno-filozoficzny. Chciałbym odpowiedzieć na pytanie o teoretyczny kontekst i powody tak ostrej reakcji Wittgensteina na teorię mnogości w okresie średnim i późnym. Czy była po prostu

[1] Por. Kuratowski, Mostowski, 1978, s. 16.

konsekwencją jego filozofii matematyki, czy miała może jakieś inne, na przykład światopoglądowe, motywy? Żeby to uczynić, musimy przedstawić szerszy kontekst rozważań Wittgensteina dotyczących niektórych aspektów jego filozofii matematyki w postaci (1) krytyki logicyzmu w TLP, przede wszystkim teorii klas oraz (2) dyskusji z Ramseyem na temat nieskończoności. Punkty (1) i (2) stanowią prolegomena do późniejszej krytyki teorii mnogości, która będzie omówiona i oceniona w punktach (3) i (4).

1. Krytyka teorii klas w *Traktacie logiczno-filozoficznym*

W *Traktacie* Wittgenstein krytycznie odniósł się do idei sprowadzenia matematyki do logiki i odrzucił wersję logicyzmu w wydaniu Russela i Fregego. Przedstawił własne rozumienie jedności logiki i matematyki, w której nie było miejsca dla pojęcia klasy[2]. W tezie 6.031 wyraził to wprost: „Teoria klas jest w matematyce całkiem zbyteczna. Wiąże się to z tym, że ogólność potrzebna w matematyce nie jest ogólnością *przypadkową*". Mówiąc o „przypadkowości", Wittgenstein miał na myśli to, że próba Russella zdefiniowania podstawowych pojęć matematyki, na przykład liczby, w terminach logicznych, a konkretnie teoriomnogościowych, oparta była na dwóch „nie-logicznych" aksjomatach: nieskończoności i redukowalności. Odrzucenie tych aksjomatów było w istocie równoznaczne z odrzuceniem teorii klas, choć oczywiście nie był to jedyny motyw. Wittgenstein w ogóle nie widział konieczności uzasadniania i uprawomocniania matematyki, tak jak nie dostrzegał takiej konieczności w logice. Wielokrotnie podkreślał, że „logika musi się sama o siebie zatroszczyć" (TLP 5.473), że teoria klas i „teoria typów", pomyślane właśnie jako takie teorie uzasadniające, są zbyteczne.

Obiekcje wobec tej teorii klas Wittgenstein zgłaszał jeszcze przed napisaniem *Traktatu*, mianowicie w *Dziennikach 1914–1916*, w których pisał:

---

[2] Takiego zdania jest też większość badaczy, np. M. Marion stanowisko Wittgensteina w *Traktacie* nazywa „logicyzmem bez klas" i mówi, że miał on na myśli „*redukcję* arytmetyki do »teorii operacji«" (Marion, 1998, s. 26). Podobnie uważają P. Frascolla (1994, s. 37), M. Potter (2000, s. 177–182) oraz O. Kuusela (2019, s. 45 i nn.). Nieco inne stanowisko reprezentują: R. Rodych (1995, s. 272–274), M. Wrigley (1998, s. 129–132) oraz S. Schroeder (2020, s. 13–31), którzy zwracają z kolei uwagę na zbyt znaczące różnice w ujęciu Wittgensteina w stosunku do teorii Russella i Fregego, by można było mówić o filozofii matematyki w TLP jako pewnej wersji logicyzmu.

„Teoria klas nie uwidacznia jeszcze dostatecznie, dlaczego zdanie (*Satz*) *potrzebuje* swego przeciwieństwa (*Gegensatz*)" (D, s. 94). Innymi słowy, teoria ta nie ukazuje dostatecznie jasno związku między zdaniem a jego negacją. W ujęciu teorii klas negacja (~*p*) byłaby klasą zdań zaprzeczających *p*, ale w takim przypadku, gdy potraktuje się te zdania jako klasy, brakuje związku między *p* i ~*p*. Wittgenstein ustanawia ten związek, wskazując na negację jako pewną operację logiczną, która dopiero wytwarza klasy, a więc jest działaniem pierwotnym wobec nich. Krótko mówiąc, Wittgenstein proponuje wyjaśnienie negacji nie w kategoriach teoriomnogościowych, ale jako operacji, w której jedno ze zdań konstruowane jest na podstawie drugiego. Myśli te rozwinął później w tezach 5.2–5.23 *Traktatu*, gdzie pojęcie operacji połączył z pojęciem stosunków wewnętrznych, określając operację jako regułę przekształcającą jedno zdanie w drugie. Po zdefiniowaniu ogólnej formy zdania, z której wynika, że każde zdanie jest rezultatem sukcesywnego stosowania operacji negacji do zdań elementarnych, oraz po podaniu ogólnej formy operacji, Wittgenstein dochodzi do definicji liczb całkowitych jako szczególnej odmiany szeregu form[3], uporządkowanego przez relację wewnętrzną i powstałego w wyniku powtarzania operacji (por. TLP 4.1252; TLP 6.03).

W pojęciach operacji i szeregu form zawarte jest pojęcie indukcji zupełnej w postaci formuły „i tak dalej", albo trzech kropek postawionych na końcu operacji logicznych i określających możliwość nieskończonego stosowania tych operacji do własnych rezultatów. Indukcja pozwala nie tylko na generowanie nieskończonych szeregów form, ale także na ustanowienie określonych związków między ich członami. Zapewnia tym samym „nieprzypadkową ogólność", by nawiązać do tezy 6.031.

W pojęciach indukcji i operacji zawarte jest z kolei pojęcie nieskończoności, które w zasadzie jest równoważne z indukcją. Wszystkie szeregi form mają tę własność, że mogą być konstruowane w nieskończoność. Ale w jakim znaczeniu „nieskończoności"? Czy Wittgenstein miał w *Traktacie* na myśli nieskończoność aktualną czy potencjalną? Odpowiedź na to pytanie nie jest jednoznaczna. Na przykład komentując aksjomat nieskończoności Russella, napisał w tezie 5.535: „To, co ma mówić aksjomat nieskończoności, wyrażałoby się językowo przez istnienie nieskończenie wielu nazw

[3] Definicję szeregu form Wittgenstein oparł na pojęciu szeregu wprowadzonym przez Fregego. Por. Frege, 1993, §29.

o różnych znaczeniach". Nieskończoność nazw implikuje zatem nieskończoność przedmiotów. W tezie 4.2211 stwierdza natomiast: „Gdyby nawet świat był nieskończenie złożony, tak że każdy fakt składałby się z nieskończenie wielu stanów rzeczy, a każdy stan rzeczy z nieskończenie wielu przedmiotów, to i wtedy musiałyby istnieć przedmioty i stany rzeczy". Tezy te świadczyć mogą o tym, że Wittgenstein dopuszczał w *Traktacie* możliwość istnienia nieskończoności aktualnej. Taka możliwość tkwi także w pojęciu „przestrzeni logicznej", rozumianej jako nieskończona całość wszystkich możliwych zdań. Ponieważ poszczególne zdanie wyznacza tylko pewne miejsce w przestrzeni logicznej, przestrzeń ta musi być już dana (por. TLP 3.42) jako całość nieskończona i określona[4].

Z powyższymi tezami, które zdają się przemawiać za nieskończonością aktualną, kontrastuje teza 4.1272, w której Wittgenstein stwierdza: „Nie można np. powiedzieć »są przedmioty« jakby się mówiło »są książki«; ani »jest 100 przedmiotów«, albo »jest $\aleph_0$ przedmiotów«. Niedorzecznością jest też mówić o *liczbie wszystkich przedmiotów*". A więc zdanie „istnieje nieskończenie wiele przedmiotów" byłoby w myśl *Traktatowej* koncepcji pojęć formalnych niby-zdaniem. Wittgenstein wprowadził termin „pojęcia formalne" właśnie po to, by ujawnić źródło mieszania tych pojęć z pojęciami właściwymi (materialnymi). Pojęcia formalne, takie pojęcia jak „fakt", „funkcja", „zdanie", „liczba", „przedmiot" etc., nie dają się, jego zdaniem, poprawnie wyrazić w języku ani za pomocą pojęcia funkcji, jak chciał Frege, ani za pomocą pojęcia klasy, jak proponował Russell. W koncepcji Wittgensteina pojęcia formalne reprezentuje zmienna zdaniowa, a jej wartość przedmioty podpadające pod te pojęcia. Każda zmienna oznacza pewną stałą formę przysługującą wszystkim jej wartościom, można ją zatem traktować jako własność formalną. Jeśli pojęć formalnych używamy nie jako zmiennych zdaniowych, ale jako pojęć właściwych, wówczas powstają niedorzecznie niby-zdania. Innymi słowy, dla Wittgensteina z okresu *Traktatu* adekwatnym wyrazem nieskończoności pozostaje „itd." albo „…"[5], a zatem nieskończoność można tylko „zobaczyć" w tych symbolach, wyrazić przez pewien schemat czy też wzór lub matrycę, którą powielamy przez sukcesywne jej stosowanie do kolejnych wyników operacji.

---

[4] Por. Marion, 1998, s. 34.

[5] Podkreśla to m.in. Rotter, 2006, s. 69.

2. Dyskusje z Ramseyem o nieskończoności i kwantyfikatorach

Uznanie teorii klas za zbędną w matematyce, a w logice za co najmniej drugorzędną, i zastąpienie jej pojęciami operacji oraz szeregu form, stanowiło niewątpliwie prolegomena do krytyki teorii mnogości przez Wittgensteina w okresie przejściowym. Szeroko drzwi dla tej krytyki otworzyły jednak dopiero dyskusje z Frankiem Ramseyem z roku 1929 dotyczące nieskończoności i problemu kwantyfikacji[6]. Skierowały one Wittgensteina w stronę finityzmu, który był głównym motywem jego polemiki z teoriami Cantora i Dedekinda[7].

W *Traktacie* Wittgenstein nie widział większego problemu, by idąc za Russellem i Fregem, zdefiniować ogólny kwantyfikator jako iloczyn logiczny: $\forall x.f(x) = fa \wedge fb \wedge fc\ldots$; zaś kwantyfikator szczegółowy jako sumę logiczną: $\exists x.fx = fa \vee fb \vee fc\ldots$ (TLP 5.521). Rolą kwantyfikatorów było zatem wytwarzanie zdań: koniunkcji albo alternatywy. Dla Wittgensteina nie miało wówczas większego znaczenia, czy liczba członów koniunkcji albo alternatywy jest skończona czy nie. Dyskusje z Ramseyem przyczyniły się do zmiany stanowiska. Ramsey w artykule *General Proposition and Causality* wykazywał, że tylko kwantyfikacje po dziedzinach skończonych można uważać za zdania, *sc*. koniunkcje albo alternatywy[8]. Kwantyfikacje po dziedzinach nieskończonych, które nazywał zmiennymi wyrażeniami hipotetycznymi (*variable hypotheticals*), są natomiast regułami tworzenia zdań, a nie zdaniami[9]. Jeśli $\forall x.f(x)$ zastępuje nieskończony iloczyn logiczny, to znając znaczenie symbolu „$\wedge$" i zakładając, że iloczyn ten jest prawdziwy, możemy wywnioskować każde zdanie o postaci *fa*. W przypadku nieskończonej koniunkcji tego jednak wiedzieć nie możemy, nasze wnioskowanie

[6] Wittgenstein i Ramsey dyskutowali problem nieskończoności i kwantyfikacji w pierwszym półroczu 1929. Dowodem tego może być dokument napisany w języku niemieckim i znajdujący się w spuściźnie piśmienniczej Ramseya, który prawdopodobnie zawierał uwagi do wykładu o nieskończoności w matematyce. Wittgenstein wygłosił go na konferencji połączonych sekcji Towarzystawa Arystotelicznego i Badań nad Umysłem w Nottingam, zamiast wykładu *Kilka uwag o formie logicznej*, który uznał za niedobry. Niestety tekst wykładu o nieskończoności nie zachował się. Więcej na ten temat Kienzler, 1997, s. 56–62; Mathven, 2020.

[7] Por. Rodych, 2000, s. 285.

[8] Por. Ramsey, 1950, s. 237–244.

[9] Tamże, s. 241 i nn.

jest więc wysoce niepewne, a co ważniejsze, nierozstrzygalne. Nie wiemy, czy gdzieś nie spotkamy „$\sim fa$”, które jest niezgodne z $\forall x\, f(x)$, gdyż wyrażenie to oznacza, że funkcja zdaniowa fx jest prawdziwa we wszystkich przypadkach. W konsekwencji nie moglibyśmy niezawodnie wnioskować z dowodu $\sim\forall x \sim f(x)$, że $(\exists x)\, fx$, na co zwracał szczególną uwagę David Hilbert[10].

Wittgenstein na przełomie lat 20. i 30. doszedł do wniosku, pod wpływem dyskusji z Ramseyem[11], że ogólny kwantyfikator możemy zapisać jako koniunkcję $fa \wedge fb \wedge fc$..., tylko jeśli trzy kropki „...” potraktujemy jak tak zwane „kropki z lenistwa” (*the dots of laziness*)[12], stawiane w miejsce skończonej ilości zdań będących argumentami funkcji prawdziwościowej. Analogicznie jak przy wymienianiu liter alfabetu: a, b, c, ..., ale nie na przykład przy zapisywaniu ciągu liczb naturalnych 1, 2, 3... Tylko wtedy, kiedy koniunkcja jest skończona, czyli kiedy „...” są „kropkami z lenistwa”, możemy skonstruować sensowne zdanie zastępujące $fa \wedge fb \wedge fc$.... Jeżeli zaś zmienna nie jest ograniczona do dziedziny skończonej i może przyjmować nieskończenie wiele wartości, tego zrobić się nie da. Mając ponadto na uwadze *Traktatowy* postulat określoności sensu (TLP 4.023) oraz to, że w przypadku nieskończenie długiej koniunkcji uchwycenie warunków prawdziwości każdego z jej członów nie jest z zasady możliwe, zdanie takie jest pozbawione sensu. Zdanie ma bowiem sens, kiedy wiemy, w jakich okolicznościach jest prawdziwe, a w jakich fałszywe. Wiedzieć

---

[10] Por. na ten temat Methven, 2015, s. 201–202.

[11] W literaturze przedmiotu istnieją spory o to, kto inspirował kogo. Niestety sporów tych nie możemy tu omawiać (zrobił to u nas J. Gomułka, 2016, s. 145–157). Zdaniem Methvena (por. Methven, 2020, s. 1108–1133) Wittgenstein i Ramsey różnili się w ujęciu sposobu, w jaki nieskończoność pojawia się w naszym myśleniu, ale obaj byli zgodni, że nie pojawia się ona jako nieskończoność aktualna. Methven stanowisko Ramseya określił jako radykalnie finitystyczne, Wittgensteinowi natomiast przypisał *holistyczne* rozumienie nieskończoności. Polega ono z grubsza na tym, że nieskończoność jest *implicite* zawarta w naszej gramatyce pewnych dyskursów dotyczących przestrzeni, czasu i kolorów. Moje pojęcie, np. nieskończonej przestrzeni, nie jest budowane niezależnie od mojego doświadczenia skończonej przestrzeni, ponieważ musi ono obejmować to, co nieskończone. Zatem to, co nieskończone, musi już być jakoś obecne w moim myśleniu, ale oczywiście nie jako niezależne od mojego doświadczenia, raczej jako zawarte w nim *implicite* – przynajmniej w niektórych obszarach. Interpretacja Metheva wymagałaby jednak oddzielnego opracowania.

[12] Sformułowanie to znamy z notatek Moore’a z wykładów Wittgensteina. Por. WLC, s. 219.

to możemy tylko wtedy, gdy zmienna przyjmuje skończoną ilość wartości (z tego względu także nieskończona suma logiczna jest niedorzecznością). Dlatego też, by uczynić sensownym zdanie $\forall x.f(x) = fa \wedge fb \wedge fc\ldots$, musimy z nieskończonego iloczynu logicznego zrobić skończony: $\forall x.f(x) = fa \wedge fb \wedge fc \ldots fn$. To jednak jest możliwe tylko, jeśli przyjmiemy, jak zauważa Glock[13], „aksjomat skończoności" mówiący, że liczba przedmiotów w świecie jest skończona. Problem w tym, że liczba przedmiotów w świecie nie jest kwestią logiczną, tylko empiryczną. Aksjomat taki byłby więc nie-logiczną podstawą logiki, którego prawdziwość i konieczność jest fundamentalnie wątpliwa, tak jak „aksjomat nieskończoności" w Russellowskiej „teorii typów", który Wittgenstein zdecydowanie krytykował i odrzucał.

3. Między rachunkiem a prozą

Dyskusje z Ramseyem uświadomiły Wittgensteinowi, jak trudno mówić o nieskończoności i że być może unikniemy w logice i matematyce związanych z nią trudności, jeśli ograniczymy się do dziedzin skończonych. Taka postawa nie dziwiła, zważywszy, że ówczesna matematyka była w większości finitystyczna. Pojawienie się teorii mnogości Cantora, którą Hilbert przyrównał do matematycznego raju, potraktowano więc jako znaczące wydarzenie. Tego optymizmu nie podzielał Wittgenstein, widząc w teorii mnogości raczej piekło[14]. Ten pierwszy był matematykiem, ten drugi filozofem. Precyzyjniej rzecz ujmując, moglibyśmy powiedzieć, że wypowiedzi autora *Traktatu* na temat teorii stworzonej przez Cantora nie są wypowiedziami matematyka, lecz raczej filozofa matematyki. Z pewnością byłaby to prawda, i to raczej niekontrowersyjna. Co więcej, Wittgenstein dążył do ścisłego odróżnienia tego, co w matematyce jest rachunkiem (*sc*. algorytmem), od wszystkiego, co nim nie jest. Pisał na przykład:

> Jest osobliwym błędem matematyków, że wielu z nich sądzi, iż przez krytykę podstaw coś *z* matematyki może odpaść. Część matematyków ma całkiem dobry instynkt: to, co już raz *policzyliśmy*, nie może wypaść i zniknąć. To, co rzeczywiście znika za sprawą krytyki, to nazwy, aluzje, które występują w rachunku, a więc to, co nazwałbym *prozą*.

[13] Por. Glock, 2001, s. 236.

[14] Por. UPM V, s. 7; LFM, 103.

> Bardzo ważne jest ścisłe rozróżnienie między rachunkiem a prozą. Skoro już raz dokona się wyraźnie tego podziału, odpadną wszystkie te pytania o niesprzeczność, niezależność etc.
>
> (WWK, s. 149)

Przez „prozę" autor tych słów rozumiał zarówno filozoficzną interpretację rachunków i dowodów, jak i stwierdzenia typu: „Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych" czy też: „Zbiór liczb rzeczywistych jest większy od zbioru liczb wymiernych"[15]. Przy czym „proza" nie jest u Wittgensteina przeciwstawiona prawdzie jako coś, co jest fałszywe samo w sobie, choć niektóre jego wypowiedzi, jak powyższa, mogłyby to sugerować. Należały raczej odróżnić prozę błędną od prozy rozjaśniającej, jakkolwiek to odróżnienie w dyskursie Wittgensteina wydaje się niekiedy trudne do przeprowadzenia, jeśli wziąć po uwagę na przykład jego zdecydowaną krytykę metody przekątniowej Cantora czy przekrojów Dedekinda i jego definicji zbioru nieskończonego. Ta krytyka uprawnia do pytania: czy Wittgenstein neguje nie tylko błędną prozatorską interpretację teorii mnogości, ale także jej sens matematyczny (rachunkowy)?

Hilary Putnam odpowiedział na to pytanie twierdząco[16]. Jego zdaniem wbrew temu, co Wittgenstein wielokrotnie podkreślał, mianowicie że w filozofii nie wolno wysuwać żadnych tez, sam je w kontekście krytyki teorii mnogości wysuwa. I są to wedle Putnama tezy całkowicie błędne, a jego filozoficzne badania dotyczące niezmiernie ważnych kwestii pojęciowych wymagały o wiele większej wiedzy naukowej i o wiele więcej respektu dla nauki. W następnych paragrafach postaramy się rozstrzygnąć, czy ocena Putnama jest słuszna, czy Wittgenstein odrzuca teorię mnogości jako błędną, czy jedynie kwestionuje jej opaczną interpretację filozoficzną.

3.1. Pomieszanie kontekstów intensjonalnych z ekstensjonalnymi

Uświadomienie sobie problemów, które rodziła kwantyfikacja po dziedzinach nieskończonych, skłoniło Wittgensteina do baczniejszego przyjrzenia się znaczeniom słów „skończony" i „nieskończony" oraz kategorialnej różnicy między nimi. W jednej z pierwszych notatek, sporządzonych zaraz

---

[15] Więcej na temat pojęcia „prozy" u Wittgensteina zob. Shanker, 1987, s. 161–198.

[16] Por. Putnam, 2007, s. 236, 246.

po powrocie do Cambridge, Wittgenstein odwołał się do dyskusji z Ramseyem o nieskończoności:

> Powiedziałem ongiś, że ekstensjonalna nieskończoność nie istnieje. Ramsey odpowiedział na to, że można sobie wyobrazić człowieka, który żył wiecznie, tzn. po prostu nie umarł. Czy nie jest to nieskończoność ekstensjonalna? Na pewno mogę sobie wyobrazić, że koło obraca się i *nigdy* nie zatrzymuje. Tkwi tu pewna osobliwa trudność: wydaje mi się czymś poniekąd przypadkowym (niedorzeczne powiedzenie), że w pokoju jest nieskończenie wiele przedmiotów. Natomiast mogę sobie pomyśleć *intensjonalnie* NIESKOŃCZONE PRAWO (albo *nieskończoną regułę*), na mocy której wytwarza się ciągle coś nowego – *ad infinitum* – ale naturalnie tylko to, co może wytworzyć reguła, czyli konstrukcje.
> Zatem wydaje się, że nieskończone obroty koła mogą być konstrukcjami, podczas gdy nowych przedmiotów konstruować nie mogę. (…) Mam wrażenie, że sam tylko negatywny opis tego, co *nie ma końca*, nie może dostarczać nieskończoności pozytywnej.
> (MS 105, s. 23–27)

Możemy więc przyjąć, że już na początku roku 1929 Wittgenstein doszedł do wniosku, że istnieje zasadnicza różnica między ekstensjonalnym a intensjonalnym punktem widzenia na nieskończoność. Tej różnicy nie dostrzegał wyraźnie w *Traktacie*, często przechodząc od jednego kontekstu do drugiego, podobnie jak Cantor, Dedekind czy Frege[17]. Wittgenstein stanął jednak na stanowisku, że istnieje zasadnicza różnica między zbiorem utworzonym w sposób ekstensjonalny i intensjonalny. Ten pierwszy sposób polega po prostu na wyliczeniu elementów zbioru, podaniu listy jego elementów. W *The Big Typescript* skonstatował: „Symbolem dla klasy jest lista" (BT, s. 740). Drugi natomiast na wskazaniu reguły generowania poszczególnych elementów zbioru czy też przytoczenia ogólnej charakterystyki jego elementów.

[17] We współczesnej teorii mnogości nie stosuje się tego podziału. Zdaniem F. Mühlhölzera (Floyd, Mühlhölzer, 2020, s. 30) termin „intensjonalny" nie jest adekwatny, ponieważ sugeruje, że znaczenie słowa to pewien byt (*entity*) zwany „intensją", a taki pogląd Wittgenstein odrzucał. Należy jednak zauważyć, że sam Wittgensteina używał tego terminu i jasno go definiował jako prawo bądź regułę, na mocy której konstruuje się pewne formy, a nie jako mentalny byt zwany znaczeniem.

Zdaniem Wittgensteina jednym z błędów teorii mnogości jest twierdzenie, że można zrozumieć znaczenie słowa „zbiór" nie wiedząc, czy jest on skończony czy nieskończony, że to możemy ustalić dopiero później[18]. Tak jednak nie jest, ponieważ w obu przypadkach słowo „zbiór" znaczy coś zupełnie innego. Różnica między zbiorami skończonymi i nieskończonymi jest różnicą kategorialną – tego, co możemy sensownie powiedzieć o pierwszych, nie da się sensownie powiedzieć o drugich. Na przykład skończony zbiór wszystkich liczb parzystych mniejszych od 10 możemy po prostu wyliczyć, podając kolejne jego elementy, sporządzić ich listę czy też wskazać jego ekstensję. W przypadku zbiorów nieskończonych podobnej listy stworzyć nie możemy. Zbiór nieskończony daje się wygenerować tylko intensjonalnie. Wittgenstein twierdził zarazem, że poprawny symbolizm powinien przedstawiać zbiór nieskończony inaczej niż skończony. Niestety nie przedstawił żadnej propozycji takiego nowego symbolizmu. Podkreślał natomiast z naciskiem, że „*Nieskończoność nie jest liczbą*. Słowo »nieskończony« ma inną składnię niż liczebnik" (WWK, s. 228). „Nieskończoność" nie oznacza też tyle, co ogromnie dużo, jak w zdaniu, że „istnieje nieskończenie wiele gwiazd", jakby słowo to przedstawiało rzeczywistość. „W sposób fałszywy operuje się słowem »nieskończony«, jak liczebnikiem; ponieważ jedno i drugie w języku potocznym odpowiada na pytanie *ile*..." (BT, s. 742). W notatkach zauważa natomiast: „Nieskończoność nie jest wielkością, ale wygląda jak wielkość. To jest nasza trudność" (MS 111, s. 190).

Wittgenstein rozumiał nieskończoność potencjalnie i kontynuował w tym tradycję sięgającą jeszcze Arystotelesa[19]. Nieskończoność jest możliwością nieskończonego stosowania reguły generującej poszczególne elementy danego ciągu albo zbioru. Przy czym należy podkreślić, co jest bardzo ważne, że tę nieskończoną możliwość stosowania reguły ujmował negatywnie jako działanie, które nie ma końca[20]: „Nieskończony ciąg liczb jest jedynie nieskończoną możliwością skończonych ciągów liczb. Bezsensowne jest mówienie o *całych* nieskończonych ciągach liczbowych, jak gdyby były także ekstensją" (PR, § 144). W tym sensie Wittgenstein odrzucał nieskończoność

[18] Por. WWK, s. 228.

[19] Więcej na temat tej tradycji por. Moore, 1991, s. 206–208.

[20] Por. PR, § 139. Dla Putmana (2007, s. 240) takie negatywne ujęcie nieskończoności w matematyce jest całkowicie nieadekwatne. Jego zdaniem nawet w podejściu intuicjonistycznym obecne jest twierdzenie pozytywne, że zawsze istnieje możliwość kontynuacji danego ciągu. Jest aksjomatem arytmetyki, że każda liczba ma następnik.

aktualną we wszelkich jej manifestacjach. Nieskończoność pozostawała dla niego własnością naszego języka, nie rzeczywistości, własnością prawa, a nie jego ekstensji. Moglibyśmy takie ujęcie nieskończoności nazwać gramatycznym i przeciwstawić je ujęciu ontologicznemu Cantora[21], dla którego nieskończoność potencjalna jest pewną nieokreśloną zmienną wielkością skończoną, rosnącą albo malejącą poza wszystkie skończone granice. Jako taka nie jest w istocie żadną nieskończonością, dlatego w *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfältigkeitslehre* nazywał ją nieskończonością niewłaściwą[22]. Nieskończoności potencjalnej, którą określał także jako „przymilną iluzję", Cantor przeciwstawiał nieskończoność aktualną, która jest stała we wszystkich swych częściach i zarazem przekracza każdą wielkość skończoną tego samego rodzaju. Przykładem może tu być ogół wszystkich skończonych liczb całkowitych dodatnich, tworzący pewien zbiór jako określoną wielkość, rzecz dla siebie (*ein Ding für sich*), niezależnie od ciągu naturalnego należących do niego liczb. Nieskończoność potencjalna ciągle wskazuje na nieskończoność aktualną, która jest jej warunkiem i użycza jej realności. Jeśli bowiem definiujemy nieskończoność jako nieskończone stosowanie reguły, to taką nieskończoność aktualną musimy już założyć jako warunek możliwości tego nieskończonego stosowania.

Wittgenstein rzecz widział całkiem inaczej. Tak jak nie możemy o tym, co możliwe, mówić w ten sam sposób, jak o tym, co rzeczywiste, tak też istnieje, jego zdaniem, zasadnicza różnica kategorialna w przypadku zbiorów skończonych i nieskończonych. Niestety tej różnicy kategorialnej nie dostrzega teoria mnogości. Na przykład Cantor przyjmował, że moc zbioru nieskończonego jest pod względem kategorialnym tym samym, co moc

[21] Por. Cantor, 2003, s. 185.

[22] J. Ferreirós (2007, s. 18–19) zwraca uwagę na filozoficzną atmosferę w Niemczech XIX w., która sprzyjała mówieniu o nieskończoności aktualnej. Hegel na przykład określał nieskończoność potencjalną jako „*złą nieskończoność*" i przeciwstawiał ją *nieskończoności jakościowej*, właściwej Absolutowi. Cantor z kolei w jednej ze swych prac przytoczył słowa Leibniza: „Tak bardzo optuję za nieskończonością aktualną, że zamiast przyznawać, że przyroda jej nie znosi, jak to się potocznie mówi, twierdzę, że działa ona w niej wszędzie po to, by lepiej zaznaczyć ślad doskonałości jej Twórcy. Tak więc sadzę, że nie istnieje żadna część materii, o której nie powiem, że jest podzielna, ale że jest aktualnie podzielona; w konsekwencji najmniejsza cząstka materii musi być rozpatrywana jako świat pełen nieskończoności rozmaitych stworzeń" (Cantor, 1932, s. 179). Na temat związków Cantora z teologami i filozofami zob. także Murawski, 2012, s. 211–237; Murawski, 2018, s. 221–242.

zbioru skończonego. Co więcej, w ocenie Wittgensteina teoria mnogości nie tylko nie odróżnia kontekstów ekstensjonalnych i intensjonalnych, ale miesza je ze sobą, powołując do życia obiekty, *sc.* „zbiory nieskończone", „liczby nieskończone" jako „nieskończone całości", które po prostu nie istnieją.

Jak już wspominaliśmy, pojęcie „zbioru" było dla Wittgensteina symbolem oznaczającym listę (ekstensję), ale w istocie zbiór tworzymy w sposób intensjonalny, to znaczy na mocy reguły. Teoria mnogości przedstawia więc zbiór nieskończony jako ekstensje, podczas gdy w rzeczywistości zbiór taki jest pojęciem intensjonalnym, to znaczy jest interpretowany jako *reguła* generowania ekstensji.

3.2. Krytyka teorii mnogości w *The Big Typescript*

Najdłuższym tekstem średniego Wittgensteina na temat teorii mnogości jest 138. rozdział *The Big Typescript* (1933) zatytułowany „Teoria mnogości". W zasadzie jest on w całości poświęcony teorii Dedekinda, jego definicji zbioru nieskończonego i konstrukcji liczb rzeczywistych. Rozważania kontynuowane są w rozdziałach 138–140. Jeśli chodzi o pierwszą z wymienionych kwestii, to przypomnijmy, że Dedekind definiował zbiór nieskończony w następujący sposób: zbór jest nieskończony wtedy, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym.

W interpretacji Wittgensteina definicja zbioru nieskończonego Dedekinda głosi, że z powodzenia bądź niepowodzenia próby przyporządkowania właściwej podklasy całej klasie ma wynikać, czy jest ona nieskończona czy nie. Zdaniem Wittgensteina jednak, taka rozstrzygająca próba nie istnieje, nie możemy efektywnie rozstrzygnąć, czy zbiór jest równoliczny ze swoim podzbiorem. „Klasa nieskończona" i „klasa skończona" są różnymi kategoriami logicznymi. Dla klasy skończonej zdanie, że nie jest ona równa swojej podklasie, jest po prostu tautologią.

> To, co nazywamy „przyporządkowaniem wszystkich elementów innej klasie" w przypadku klasy skończonej, jest zupełnie czymś innym niż to, co nazywamy np. przyporządkowaniem wszystkich liczb kardynalnych wszystkim liczbom wymiernym. Oba przyporządkowania, albo to, co oznacza się tym słowem, należą w tych dwóch przypadkach do dwóch różnych typów logicznych. „Klasa nieskończona" nie jest klasą, która zawiera więcej elementów niż klasa skończona, w potocznym sensie słowa „więcej". Jeśli mówimy, że liczba nieskończona jest

> większa od liczby skończonej, to nie robi to obu liczb porównywalnymi, ponieważ w tej wypowiedzi słowo „większa" ma *inne znaczenie* niż np. w zdaniu „5 jest większe od 4".
>
> (BT, s. 743)

Drugim obiektem ataku Wittgensteina była konstrukcja liczb niewymiernych przez Dedekinda, który definiował liczbę niewymierną jako przekrój liczb wymiernych niewyznaczony przez żadną liczbę wymierną (tzw. przekroje Dedekinda). Swoją teorię oparł na pewnej intuicji nazwanej „zasadą ciągłości", która głosi: „Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli rozcięcie prostej" (Dedekind, 2003, s. 158). Dedekind rozwinął swoją konstrukcję liczb niewymiernych właśnie na podstawie tej zasady. Przekrojem nazwa on podział wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na dwie klasy A, B takie, że każda liczba a z pierwszej klasy A jest mniejsza od każdej liczby b z drugiej klasy B. Symbolicznie:

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$
3. $\forall a \in A, b \in B: a < b$

Każda liczba wymierna wytwarza przekrój, jeśli w A istnieje liczba największa albo w B istnieje liczba najmniejsza. Zdaniem Dedekinda łatwo przekonać się jednak, że istnieje nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wytwarzane przez żadną liczbę wymierną. Jest tak w sytuacji, kiedy w A nie ma liczby największej, a w B nie ma liczby najmniejszej. Jako przykład podaje przekrój wyznaczony za pomocą liczby naturalnej D niebędącej kwadratem żadnej liczby całkowitej. Jeśli do klasy B przyjmiemy każdą dodatnią liczbę wymierną b, której kwadrat jest $> D$, natomiast do klasy A wszystkie pozostałe liczby wymierne a, to podział ten tworzy przekrój, to znaczy każda liczba a jest mniejsza od każdej liczby b. W przekroju tym nie ma jednak ani największej liczby wymiernej w A, ani najmniejszej takiej liczby w B, a zatem przekrój wyznaczony jest przez liczbę niewymierną, można bowiem łatwo udowodnić, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat $= D$. W *The Big Typescript* Wittgenstein odniósł się wprost do metody Dedekinda:

> Definicja cięcia Dedekinda pretenduje do bycia czymś oglądowym, skoro powiada: istnieją trzy przypadki: albo klasa R ma pierwszy człon,

> a L nie ma ostatniego etc. W istocie 2 z tych 3 przypadków nie dają się pomyśleć. Chyba że słowa „klasa”, „pierwszy człon”, „ostatni człon” zmieniają całkowicie swoje potoczne znaczenie, rzekomo zachowane. Jeśli mówimy oto – zdumieni tym, że ktoś rozprawia o klasie punktów, która leży na prawo od danego punktu i nie ma początku – daj nam przykład takiej klasy, to on wyciąga przykład liczb wymiernych! Ale tutaj nie ma żadnej klasy punktów w sensie źródłowym!
>
> (BT, s. 739)

> Punkt przecięcia się dwóch krzywych nie jest wspólnym członem dwóch klas punktów, ale przekrojem dwóch praw. Chyba że pierwsze wyrażenie definiuje się, bardzo błędnie, za sprawa drugiego.
>
> (BT, s. 739)

Wittgenstein zarzucił teorii Dedekinda, że przekrój nie jest operacją arytmetyczną, że liczby reprezentujące przekroje nie są generowane na mocy prawa.

> Jeśli według Dedekinda liczby wymierne dzielą się na dwie klasy, to jak można rzeczywiście dokonać tego podziału bez jakiegoś prawa. Nie mogę wszak wyliczyć liczb wymiernych po każdej ze stron. Chociaż geometrycznie udaje się to łatwo.
>
> (MS 106, s. 76)

Przekrój Dedekinda mógłby być uznany za metodę określającą liczbę rzeczywistą tylko pod warunkiem, że byłby wyznaczony przez arytmetyczne prawo, które wyraźnie klasyfikowałoby liczby wymierne do dwóch zbiorów i w tym sensie stanowiłoby podstawę decyzji, do której z tych dwóch zbiorów należy dana liczba wymierna[23]. Przekroje Dedekinda nie są, zdaniem Wittgensteina, takimi konstrukcjami, i w tym sensie nie są regulowane przez arytmetyczne prawo. Przedstawiają natomiast obraz niekończącego się procesu przybliżania, który jednak pozostawia nas nieskończenie daleko od poszukiwanej liczby rzeczywistej. Wittgenstein pyta dlatego: „Czym różni się nieskończenie skomplikowane prawo od braku prawa?” (BT, s. 767). Dla niego liczby niewymierne to nie są ekstensje, ale *reguły*, czy też prawa, tworzenia rozwinięć dziesiętnych. Te reguły nazywamy liczbami po prostu dlatego, że możemy za ich pomocą liczyć podobnie jak na liczbach

[23] Por. Da Silva, 1993, s. 93.

wymiernych[24]. Na przykład 1/7 jest inną regułą tworzenia rozwinięcia dziesiętnego, powiedzmy bardziej bezpośrednią, niż √2. Tymczasem przekroje Dedekinda są raczej pewnym ekstensjonalnym wyobrażeniem mającym swe źródło w geometrii.

Dochodzimy tu do trzeciego zarzutu wobec Dedekinda teorii liczb rzeczywistych jako przekrojów liczb wymiernych. Wittgenstein uznawał za błędną samą ideę, że istnieje punkt korespondujący na przykład z liczbą √2. Ta idea jest konsekwencją przyjęcia, że prosta składa się punktów oraz luk między nimi, które zgodnie z zasadą ciągłości należałoby wypełnić i które to punkty i luki istnieją jakby uprzednio wobec naszych konstrukcji. „Matematyka jest całkowicie zanieczyszczona przez szkodliwe wyrażenia teoriomnogościowe. Przykładem tego jest mówienie, że prosta składa się z punktów". Dla Wittgensteina linia prosta nie jest zbiorem punktów, ale „*prawem* posuwania się dalej" (UPM V, s. 36). Matematycy snują błędne analogie między liczbami rzeczywistymi i geometryczną linią złożoną z punktów, które odpowiadają tym liczbom. Dedekind, wiedziony takim obrazem, dążył do wypełniania rzekomych luk w imię niezbywalnej idei ciągłości[25].

Również więc w przypadku krytyki przekrojów Dedekinda głównym argumentem Wittgensteina było pomieszanie ujęcia ekstensjonalnego z intensjonalnym[26]. Nie akceptował on myślenia o punktach i odpowiadających im liczbach. Jeśli przyjmiemy, że przecinając prostą w dowolnym punkcie, natrafimy albo na liczbę wymierną, albo niewymierną, to zakładamy, że te liczby uprzednio już istnieją, niezależnie od naszych konstrukcji. Autor *Traktatu* odrzucał zatem ekstensjonalną reprezentację liczb wymiernych i niewymiernych za pomocą prostej i punktów, uznając przekroje Dedekinda

[24] Wittgenstein nie był pierwszym, który postulował arytmetyczną konstrukcję liczb niewymiernych. Podobnie myślał H. Weyl w pracy *Das Kontinuum* (1928), w której odrzucał liczby niewymierne niebędące arytmetycznie zdefiniowanymi przekrojami liczb wymiernych. Da Silva zwraca uwagę na żyjącego w czasach Kanta matematyka Augusta W. Rehberga, który głosił intensjonalną teorię liczb niewymiernych. Por. Da Silva 1993, s. 95.

[25] Ten aspekt krytyki Dedekinda akcentuje szczególnie S. Shanker (por. 1987, s. 187 i nn.). Z kolei Putnam twierdzi, że to, iż Wittgenstein kwestionował matematyczną ciągłość, która, jego zdaniem, jest wszystkim dla współczesnej matematyki, pokazuje, że szedł on złą drogą (por. Putnam, 2007, s. 245).

[26] Por. Bernays, 1959, s. 19.

za działania motywowane geometrycznie[27]. Biorąc pod uwagę finitystyczne i konstruktywistyczne stanowisko Wittgensteina w filozofii matematyki, chciałby on wprowadzić przekroje nie jako zbiory, ale prawa (*resp*. reguły) dla takich zbiorów. Chodziłoby mu zatem o coś wcześniejszego niż przekrój, o coś, co dopiero ten przekrój generuje. Jak zauważa jednak Paul Bernays[28], w takim przypadku albo używa się bardzo niejasnego pojęcia „prawa", albo, na co zwrócił z kolei uwagę Weyl, wpada w błędne koło w podstawach analizy związanej z definicjami niepredykatywnymi. Zdaniem Bernaysa Dedekindowi udało się tego uniknąć, reprezentując konsekwentnie inkryminowane przez Wittgensteina podejście ekstensjonalne. Przyjął za coś intuicyjnie ważnego i niewymagającego dalszego uściślania i redukcji pojęcie zbioru liczb naturalnych i w konsekwencji zbioru liczb wymiernych.

Krytyka Wittgensteina nie zawsze jednak oddawała należną sprawiedliwość teorii Dedekinda. W pracy *Ciągłość a liczby niewymierne* Dedekind wyraźnie stwierdzał, że odwołanie się do geometrycznych intuicji jest użyteczne z dydaktycznego punktu widzenia, ale jemu chodzi o twierdzenia „dowiedzione w sposób czysto arytmetyczny" (Dedekind, 2003). Dystansując się wobec dotychczasowego sposobu wprowadzenia liczb niewymiernych jako wyniku mierzenia wielkości ciągłych za pomocą innej takiej wielkości, mówił: „zamiast tego żądam, by arytmetyka rozwijała się sama z siebie" (Dedekind, 2003, s. 157), co oznaczało między innymi, by liczby niewymierne zdefiniować w pełni za pomocą liczb wymiernych[29].

---

27 Por. na ten temat Marion, 1998, s. 211. W *Uwagach o podstawach matematyki* przekroje te nazywał „zwodniczymi ilustracjami" (UPM V, s. 29), czyli takimi, które nie są zastosowaniami analizy: „W ekstensjonalnym podejściu Dedekinda myląca jest idea, że liczby rzeczywiste znajdują się na osi liczb. Możemy je znać lub nie; to niczego nie zmienia. Wystarczy tylko dokonać przekroju lub podziału na klasy, by wskazać im wszystkim miejsce" (UPM V, s. 37).

28 Por. Bernays, 1959, s. 20.

29 M. Marion zdaje się jednak przyznawać rację Wittgensteinowi, kiedy stwierdza, że pomimo deklaratywnych intencji definicja liczb rzeczywistych jako przekroi była motywowana geometrycznie, o czym świadczyć mogą następujące wypowiedzi Dedekinda: „Rzeczą najważniejszą jest teraz fakt, że na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej (…). Jeśli chce się teraz, a taki przecież jest nasz zamiar, zbadać arytmetycznie wszystkie zjawiska mające miejsce na prostej, to liczby wymierne nie wystarczają do tego i nieodzowne staje się ulepszenie instrumentu R, który otrzymany został poprzez stworzenie liczb wymiernych. Ulepszenia tego dokonać można poprzez stworzenie nowych liczb tego rodzaju, że dziedzina liczb

Putnam zwraca uwagę na inny jeszcze aspekt inkryminowanego przez Wittgensteina związku między punktami w przestrzeni a liczbami[30]. Chodzi o to, że od czasu wynalezienia przez Kartezjusza geometrii analitycznej, co było zarazem początkiem matematycznej fizyki, pojęcie punktu w przestrzeni – dzisiaj czasoprzestrzeni – zależne jest od pojęcia liczby rzeczywistej. To znaczy – każdy punkt w przestrzeni może być zdefiniowany za pomocą trzech liczb rzeczywistych (trzech współrzędnych). Jeśli byłoby tak, jak twierdził Wittgenstein, mianowicie, że pojęcie liczby rzeczywistej jest nieokreślone, to równie nieokreślone byłoby pojęcie punktu w przestrzeni. Jak za chwilę pokażemy, Wittgenstein mówił, że „nie ma zbioru liczb niewymiernych”, ale w takim razie równie dobrze moglibyśmy powiedzieć: „nie ma punktów w przestrzeni”. Pamiętajmy także, że we współczesnej fizyce pojęcie cząstki straciło swą fundamentalną rolę na rzecz pojęcia pola. Wielkość pola, na przykład pola elektromagnetycznego czy grawitacyjnego, może być mierzona za pomocą liczb rzeczywistych w każdym punkcie przestrzeni. Jeśli zatem pojęcie „punktu w przestrzeni” byłoby nieokreślone tak, jak nieokreślone jest pojęcie liczby rzeczywistej, to w konsekwencji także nieokreślone byłoby pojęcie pola.

4. Metoda przekątniowa Cantora, czyli hokus-pokus

Jak wiadomo, jednym z wielkich osiągnięć Cantora było udowodnienie, że liczb rzeczywistych jest *więcej*[31] niż liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych, których zbiory są przeliczalne. Tak nie jest jednak w przypadku liczb rzeczywistych, czego dowodził Cantor, posługując się tak zwaną metodą przekątniową. Wittgenstein podawał w wątpliwość, czy ogólnie akceptowany

---

uzyska tę samą zupełność, czy, jak równoważnie chcemy to wyrazić, tę samą *ciągłość*, która przysługuje prostej” (Dedekind, 2003, s. 156–157). Według Mariona intencją Dedekinda było uzupełnienie dziedziny liczb wymiernych o liczby niewymierne i uzyskanie sposobem arytmetycznym ciągłości, jaka przysługuje prostej. Dedekind rozciągnął więc zasadę geometrycznej ciągłości na arytmetykę. Wedle Wittgensteina dowód Dedekinda, że istnieje nieskończenie wiele przekroi liczb wymiernych, jest uprawomocniony przez wyobrażenie ciągłości, podczas gdy powinno być na odwrót, tzn. to wyobrażenie powinno być uprawomocnione przez dowód. Por. Marion, 1998, s. 211.

30 Por. Putnam, 2007, s. 244.

31 Oczywiście słowo „więcej” należy tu rozumieć w sensie pojęcia mocy zbioru.

rezultat metody przekątniowej – odkrycie pewnej substancjalnej prawdy matematycznej – jest adekwatną interpretacją tej metody.

Większość fragmentów na temat metody przekątniowej pochodzi z *Uwag o podstawach matematyki* z około 1938 roku, ale o metodzie Cantora Wittgenstein wspomina już w notatkach z roku 1930. Krytykuje on nie tyle samą metodę, która przecież ma konstruktywny charakter, ile użytek, który zrobił z niej Cantor. Za rzeczywisty cel metody przekątniowej uznał tam dowód niemożliwości ułożenia w ciąg liczb niewymiernych. Jego zdaniem błąd polega tu na tym, że pojęcie ciągu nieskończonego zostało wyabstrahowane z ciągu liczb naturalnych i innych podobnych ciągów. Niestety nie wystarcza to, by nadać jasny sens pytaniu, czy zbiór liczb rzeczywistych można uporządkować w ciąg. Co najwyżej moglibyśmy stwierdzić, że mamy przykłady porządkowania liczb naturalnych, wymiernych czy algebraicznych i że są to pewne analogiczne wytwory nazywane ciągami. Nie mamy jednakże pomostu pozwalającego przejść od tych przypadków do przypadku „wszystkich liczb rzeczywistych". Nie dysponujemy także żadną ogólną metodą pozwalającą na ustalenie, czy dany zbiór można ustawić w ciąg. Dla Wittgensteina nie ma wystarczająco jasnej różnicy w sposobie używania terminów „pierwiastek", „liczba algebraiczna" etc. a pojęciem „liczby rzeczywistej". Jego zdaniem nie ma sensu mówienie o ciągu wszystkich liczb rzeczywistych, skoro metoda Cantora także liczbę przekątniową tego ciągu określa jako „liczbę rzeczywistą" (por. UPM II, s. 16). Krótko mówiąc, Wittgenstein widział w dowodzie przekątniowym raczej metodę czy też regułę dla sukcesywnego konstruowania liczb, które są różne od każdej kolejnej liczby w danym systemie (ciągu)[32].

Drugie zastosowanie metody przekątniowej, które krytykował Wittgenstein, to jej wykorzystanie jako dowodu, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Właściwie cała krytyka teorii mnogości Cantora w II Części UPM zaczyna się od tego problemu. Czytamy tam: „10. Nic nie znaczy powiedzenie: '*A zatem* liczby X nie są przeliczalne'" (UPM II, s. 10). Wedle Putnama stwierdzenie to jest jednym z koronnych dowodów na to, że w II części UPM mamy wyraźne i oczywiste odrzucenie tezy o nieprzeliczalności zabioru liczb rzeczywistych i całej teorii Cantora. Putnam pisze: „Powiada on nam [Wittgenstein – P.D.], ku mojemu zdziwieniu, że *nic nie znaczy* powiedzenie o pewnej klasie liczb X, że jest nieprzeliczalna!"

---

[32] Por. Floyd, Mühlhölzer, 2020, s. 140–141.

(Putnam, 2007, s. 236). Jednakże bliższe przyjrzenie się sprawie, co zawdzięczamy szczegółowym badaniom Felixa Mühlhölzera[33], nie potwierdza oceny Putnama. Chodzi bowiem o to, że Wittgenstein w § 10 akcentuje słowo „*A zatem”* (w oryginale – „*Also*”), pisząc je kursywą. To właśnie owo „*A zatem*” nic nie znaczy, a nie to, że „liczby X są nieprzeliczalne”. Słówko „*A zatem*” wyraża bowiem konsekwencje metody przekątniowej, o której mowa we wcześniejszych paragrafach 8 i 9. Wittgenstein natomiast „nieprzeliczalność” poniekąd utożsamiał z tą metodą w tym znaczeniu, że kto ją zrozumiał, ten zrozumiał, że dla dowolnej listy rozwinięć dziesiętnych liczb rzeczywistych istnieje liczba, *sc*. liczba przekątniowa, która nie znajduje się na tej liście: „Pojęcie liczby X nazywam nieprzeliczalnym, jeżeli ustalono, iż którekolwiek z podpadających pod nie liczb ułożymy w ciąg, liczba przekątniowa tego ciągu również ma pod nie podpadać” (UPM II, s. 10). Pomijając niezręczność językową mówienia o nieprzeliczalności pojęcia liczby X zamiast jej ekstensji, „*A zatem*” rzeczywiście nic nie znaczy, ponieważ kiedy je wypowiadamy, to powtarzamy po prostu to, co jest już wiadome z samej przytoczonej wyżej definicji nieprzeliczalności. Albo: „*nic nie znaczy*”, gdyż wedle metody przekątniowej liczby rzeczywiste są nieprzeliczalne. Wittgenstein ma więc rację, przyjmując oczywiście jego definicję nieprzeliczalności. Akceptował on nieprzeliczalność, w tym oczywiście nieprzeliczalność liczb rzeczywistych, ale rozumiał inaczej niż powszechnie rozumie się to pojęcie w matematyce, to znaczy po prostu jako coś, co „nie daje się przeliczyć”. Jak zauważa Mühlhölzer[34], matematycy nie zaakceptowaliby rozumowania Wittgensteina, ponieważ teoria mnogości dostarcza ogólniejszej definicji nieprzeliczalności, którą można w pełni zrozumieć niezależne od metody przekątniowej Cantora. Metoda ta właśnie *dowodzi* nieprzeliczalności liczb rzeczywistych. Wtedy „*A zatem*” oznaczałoby, że Cantor pokazuje nam, że pojęcie liczby X podlega pod ogólniejsze pojęcie nieprzeliczalności, z którym ta metoda nie jest już koniecznie połączona. Przeciw temu dokładnie Wittgenstein oponował w § 10. Jego zdaniem pojęcie nieprzeliczalności powinno być rozumiane w bezpośrednim nawiązaniu do metody przekątniowej, ale wówczas metoda ta nie dostarcza nam nowego faktu matematycznego, ale jest jedynie wynalezieniem nowego pojęcia.

[33] Por. tamże, rozdz. 7.

[34] Por. tamże, s. 155.

Gdyby metoda przekątniowa ograniczała się do pokazania, że pojęcie „liczby rzeczywistej" bardziej różni się od pojęcia liczby naturalnej niż zwykliśmy sądzić, to byłoby to jasne postawienie sprawy. Ale, zdaniem Wittgensteina, dzieje się tu coś przeciwnego: zbiór liczb rzeczywistych porównuje się pod względem wielkości ze zbiorem liczb naturalnych, a ich odmienność przedstawia się jako różnicę zakresów. „Wierzę i mam nadzieję, że przyszłe pokolenia będą śmiać się z tego hokus-pokus" (UPM II, s. 22)[35]. Hokus-pokus nazywa tutaj Wittgenstein dowód oparty na metodzie przekątniowej, że nieskończony zbiór $\mathbb{R}$ ma większą ekstensję niż pozostałe zbiory nieskończone. Jest to kluczowy moment w jego krytyce Cantora. Jeśli metodę przekątniową mielibyśmy uważać za dowód na istnienie mniejszej bądź większej nieskończoności, to byłby to, jak mawiał Wittgenstein, „dowód chełpliwy", czyli taki, który pokazuje więcej niż pozwalają na to stosowane w nim środki[36]. „Niebezpieczeństwo zwodniczości poglądu, że 'Liczb rzeczywistych nie można uporządkować w ciąg' albo, że 'Zbiór … nie jest przeliczalny', polega na tym, że określenie pojęciowe, konstrukcja pojęciowa, jawi się w jego świetle jako fakt przyrodniczy" (UPM II, s. 19).

Wittgenstein był zdania, że różnica między zbiorami skończonymi i nieskończonymi nie jest różnicą zakresów (*resp*. stopnia), ale różnicą kategorialną. Nie jest on zatem przeciw nieprzeliczalności jako takiej, ale przeciw jej prozatorskiej interpretacji. Powiedzenie, że metoda Cantora *pokazuje*, że zbiór liczb rzeczywistych jest *większy* niż zbiór liczb naturalnych, jest właśnie owym hokus-pokus. W kontekście jego intensjonalnego rozumienia zbioru nieskończonego żaden w ogóle dowód na większą bądź mniejszą nieskończoność nie jest *ex definitione* możliwy. Istotniejsze jest jednak to, że w teorii Cantora $\aleph_0$, podobnie jak c, traktuje się jako liczby i porównuje z innymi liczbami, zarówno skończonymi, jak i nieskończonymi. Wittgenstein skłonny byłby przyjąć, że może istnieć wiele różnych systemów liczb rzeczywistych, ale nie możemy skonstruować jednego wyczerpującego systemu wszystkich takich liczb. Zwracał na to uwagę już w *The Big Typescript*,

---

[35] Warto może wspomnieć, że w pierwszym dwujęzycznym wydaniu *Uwag o podstawach matematyki* zdanie o „hokus-pokus" zostało usunięte, jakby wydawcy wstydzili się słów Wittgensteina, a może uznali je za zbyt obrazoburcze. Zob. L. Wittgenstein (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik / Remarks on the Foundations of Mathematics*, red. G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, Oxford: Basil Blackwell, s. 57/57e.

[36] Por. UPM II, s. 21.

kiedy analizował różne rodzaje liczb rzeczywistych takich jak π′, P. F, √2. W *Uwagach o podstawach matematyki* pisał zaś w tonie kategorycznym: „*Nie istnieje żaden system liczb niewymiernych – nie istnieje jednak również żaden nadsystem, żaden* ‘*zbiór liczb niewymiernych*’ *cechujący się nieskończonością wyższego rzędu* [podkr. – P.D.]” (UPM II, s. 33).

Komentując te słowa, Putnam[37] zauważa, że Wittgenstein w arogancki sposób odrzuca coś, co jest centralnym twierdzeniem nie tylko teorii mnogości, ale całej współczesnej matematyki, że mianowicie istnieje zbiór liczb niewymiernych i że jest on nieprzeliczalny. Słowa Wittgensteina należy jednak rozumieć w kontekście jego nie-ekstensjonalistycznego stanowiska, wedle którego liczby rzeczywiste nie istnieją jako homogeniczna całość, ale są wytwarzane w rozmaity sposób, który nie jest z góry określony. W przytoczonym § 33 mowa jest o tym, że geometryczny sposób mówienia sugeruje istnienie jakiegoś „super-systemu” o „wyższej” (*sc.* aktualnej) nieskończoności, podczas gdy wedle Wittgensteina metoda przekątniowa Cantora pokazuje nam, że nie istnieje system liczb rzeczywistych, to znaczy ich ciąg, zawsze bowiem możemy wskazać na liczbę, która nie należy do tego systemu. W tym sensie nie istnieje „zbiór liczb niewymiernych” (właściwie powinno być: „rzeczywistych”) rozumiany ekstensjonalistycznie jako jednorodna dziedzina liczb, ponieważ dla Wittgensteina zbiory nie są definiowane przez ich elementy, ale na mocy reguł, praw i technik konstruowania tych elementów. Z tego punktu widzenia dziedziny liczb nie są czymś jednorodnym, nie mają wyraźnych granic. Na przykład liczb rzeczywistych nie sposób zdefiniować jako przekrojów liczb wymiernych (Dedekind) *albo* przez rozwinięcia dziesiętne *albo* jako zbiór punktów na prostej[38].

4.1. Kryterium zastosowania

Ostatni wątek krytyki Wittgensteina związany jest z problemem stosowalności matematyki. W ostatnim z paragrafów części II UPM pisał on:

> 62. Nie zajmuję się wykazywaniem błędności rachunków, lecz badaniem tego, co w nich *interesujące*. Badam np. to, w jakiej mierze jest tu jeszcze usprawiedliwione używanie słowa …; (…) Nie mogę zatem powiedzieć: „Nie wolno się tak wyrażać” albo „To jest absurdalne”,

---

[37] Por. Putnam, 2007, s. 239.

[38] Por. Floyd, Mühlhölzer, 2020, s. 33.

> albo „to jest nieinteresujące", lecz: „Zbadaj w ten sposób to wyrażenie pod kątem jego zasadności". Zasadność jakiegoś sposobu wyrażenia nie sposób uchwycić, nie ogarniając *jego zastosowania*, tego zaś nie dokażemy, przyglądając się tylko jednemu aspektowi jego zastosowania, np. obrazowi, jaki się z nim wiąże".
>
> (UPM II, s. 620)

To właśnie kryterium zastosowania pokazuje, zdaniem Wittgensteina, że nieprzeliczalność jest „hokus-pokus". Pyta on: „Do czego można użyć pojęcia nieprzeliczalny?" (UPM II, s. 12). – Do niczego. Autor *Traktatu* stał na stanowisku, że matematyczna „gra językowa" stosuje pojęcia i znaki, których używamy poza matematyką, to znaczy w zdaniach empirycznych, przechodząc od jednych do drugich takich zdań. O ile możemy zastosować do zdań empirycznych pojęcie „parzysty", np. „musimy podzielić się na dwie równe drużyny", to nie znajdujemy podobnego zastosowania dla pojęcia „nieprzeliczalny". Jednym z fundamentalnych przeświadczeń Wittgensteina było to, że sam tylko rachunek staje się matematyką dopiero za sprawą jego pozamatematycznych aplikacji. Co więcej, to właśnie pozamatematyczne użycie znaków nadaje im znaczenie: „Chcę powiedzieć: dla matematyki istotne jest to, że jej znaków używa się również w *cywilu*. To użycie znaków poza obrębem matematyki, a więc ich *znaczenie*, czyni z gry w znaki matematykę". Istotą filozofii matematyki Wittgensteina był bowiem pogląd, obecny już w *Traktacie*, że zdania matematyczne nie są opisem abstrakcyjnych bytów matematycznych (Frege), ani opisem rzeczywistości empirycznej (Russell, Ramsey), ani nie opisują działań umysłu. Zdania matematyczne to według niego reguły reprezentacji, mają sens *preskryptywny*, czyli są wzorcami przekształcania zdań empirycznych. Na przykład zdanie „5 > 4" pozwala na stwierdzenie, że Jaś, który ma 5 lat, jest starszy od Małgosi, która ma 4 lata i wyklucza zdanie „Małgosia jest starsza od Jasia". Podobnie zdania geometrii są regułami gramatycznymi opisu stosunków przestrzennych przedmiotów empirycznych. W tym kontekście Wittgenstein był przekonany, że teoria mnogości tworzy pojęcia, ale nie ma jasności co do ich pozamatematycznego zastosowania. „Nie istnieje technika *gramatyczna*[39] [zmiana tłum. – P.D.], która podsuwałaby nam sposób użycia takiego wyrażenia

[39] W polskim tłumaczeniu *Uwag* zamiast „technika gramatyczna" (*grammatische Technik*) jest błędnie „technika matematyczna", co niestety wypacza sens paragrafu 38. Technika matematyczna użycia wyrażeń teoriomnogościowych oczywiście istnieje.

[jak np. $\aleph_0 < c$ – P.D.]" (UPM II, s. 38). W przeciwieństwie do „$5 > 4$" zdanie, powiedzmy, „$2^{\aleph_0} > \aleph_0$" nie jest żadną regułą przekształcania zdań empirycznych, to znaczy nie ma pozamatematycznego zastosowania i w tym sensie nie wiemy, co z tym zdaniem zrobić. Przy czym to pozamatematyczne zastosowanie Wittgenstein rozumiał bardzo szeroko – jako zastosowanie w naukach empirycznych, ale także w życiu codziennym. Rodzi się jednak pytanie, czy teoria mnogości, która nie ma bezpośrednich zastosowań w realnym świecie, jest jeszcze matematyką? Wittgenstein stawia to pytanie wprost: „Jeśli zamierzone zastosowanie matematyki jest czymś istotnym, *to* jak ma się rzecz z tymi działami matematyki, których zastosowanie – a przynajmniej to, co za takowe uważają matematycy – jest zupełnie fantastyczne? W rezultacie – jak w przypadku teorii mnogości – uprawiamy jakąś gałąź matematyki, o której zastosowaniu mamy zupełnie opaczne pojęcie. Czyż *mimo to* nie uprawiamy wówczas matematyki? (UPM V, s. 5). Na to pytanie można by odpowiedzieć, że teoria Cantora jest przecież grą prowadzoną za pomocą symboli wedle pewnych reguł, nawet jeśli nie mamy jasności co do ich zastosowania. Odpowiedź Wittgensteina brzmi niedwuznacznie: „Ale jak można dysponować pojęciem, a nie mieć jasności co do jego zastosowania" (UPM V, s. 7). „Na razie nie mają zastosowania, ale być może w przyszłości je znajdziemy, również dla zdania $2^{\aleph_0} > \aleph_0$: Na razie jest ono fragmentem zawieszonej w powietrzu architektury matematycznej i wygląda, powiedzmy, jak architraw, nic go jedna nie podtrzymuje i on sam niczego nie podtrzymuje" (UPM II, s. 35). Jednakże, jak podkreśla Rodych[40], Wittgensteinowskie kryterium zastosowania wymaga syntaktycznej spójności. Jeśli teoria mnogości miałaby być fragmentem matematycznej architektury, to musiałaby być syntaktycznie spójna. Z uwagi jednak na niemożliwość dowodu absolutnej spójności rachunku matematycznego „zawsze będzie potrzebny jakiś dobry diabeł" (UPM VII, s. 16), aby teoria mnogości mogła być z sukcesem zaaplikowana w realnym świecie[41].

---

[40] Por. Rodych, 1997, s. 214–216.

[41] Oczywiście problem stosowalności matematyki oraz podział na matematykę czystą i stosowaną jest u późnego Wittgensteina skomplikowany i wymagałby osobnego opracowania. Według Maddy (1993) dla Wittgensteina tylko matematyka, która ma zastosowania w poza-matematycznej rzeczywistości, zasługuje na miano matematyki, podczas gdy zdania czystej matematyki, pozbawione poza-matematycznych zastosowań, pozbawione są także sensu. W takim ujęciu czysta matematyka byłby tylko grą znakami o podejrzanej obiektywności. Inny pogląd reprezentuje Dawson (2014, s. 4143–4148),

Brak *cywilnych* aplikacji rekompensujemy sobie za to tajemniczością, pewnym intelektualnym powabem, urokiem albo czarem[42] twierdzeń takich jak to, że istnieją liczby większe od nieskończoności, i zamiast od razu tłumaczyć je jako skutek błędnego rozumienia, otacza się je powagą i szacunkiem[43]. To właśnie paradoksy nieskończoności powołały do życia teorię mnogości, bez nich nigdy by ona nie powstała. Nie może być jednak interesujące coś, co powstało z opacznego rozumienia, to znaczy z opacznego rozumienia nieskończoności jako czegoś aktualnego. Wydawałoby się, że sieć języka, w którą zaplątał się Cantor, jest interesująca, ale to tylko pozór. Coś, co powstało z błędnego rozumienia, nie może być interesujące, to znaczy stosowalne. Tajemniczość i czar są nieistotne, w rachunkach liczą się tylko praktyczne konsekwencje, np. ich aplikacje w fizyce. „Pewne

---

według którego relacja między matematyką stosowaną i czystą jest u Wittgensteina bardziej zniuansowana. Traktował on bowiem matematykę jako „pewną rodzinę" (UPM VII, s. 33), w której główną postacią jest matematyka mająca poza-matematyczne zastosowania. Czysta matematyka, której brak takich bezpośrednich aplikacji w świecie realnym, może mieć jednak związki z innymi systemami matematycznymi, które mają takie aplikacje i w tym znaczeniu czysta matematyka może być czymś więcej niż tyko grą znakami. Interpretację Dawsona podzielają Pérez-Escobar i Sarikaya (por. Pérez-Escobar, Sarikaya, 2022, s. 1–22), którzy podkreślają kulturowy i socjologiczny sens aplikacji.

[42] W *Wykładach i rozmowach o estetyce, psychologii i wierze religijnej* Wittgenstein sugerował, że wiele wyjaśnień psychoanalizy przyjmujemy, ponieważ mają dla nas pewien czar czy też urok: „Wyobrażenie świata podziemnego, tajemniczej piwnicy. Coś ukrytego, niesamowitego". Interpretacje Freuda w szczególny sposób nas pociągają, ich atrakcyjność wydaje się nieodparta i to nie dlatego, że ich podstawą jest rzetelna wiedza empiryczna, ale ważna jest pewna *postawa*, którą wyrażają. Podobny urok i atrakcyjność ma, jego zdaniem, teoria Cantora: „Np. całkowicie obaliłem dowód Ursella. Ale kiedy to zrobiłem, on odrzekł, że ten dowód ma dla niego pewien urok. Na to mogę tylko odpowiedzieć: »Dla mnie nie ma żadnego uroku. Czuję do niego odrazę«. Por. wyrażenie: »Liczba kardynalna wszystkich liczb kardynalnych«. 38. Por. Cantor pisał, jakie to wspaniałe, że matematyk może w swojej wyobraźni [w umyśle – T] przekraczać wszelkie granice. 39. Zrobiłbym wszystko, by pokazać, że to właśnie ten urok tak nas zwodzi. Jako matematyka albo fizyka wygląda to jako coś bezspornego i dlatego nabiera jeszcze większego powabu. Jeśli wytłumaczymy kontekst tego wyrażenia zobaczymy, że rzecz można by wyrazić w całkiem inny sposób. Mogę ją przedstawić tak, że dla wielu ludzi straci swój urok, a już na pewno straci go dla mnie" (Wittgenstein, 1967, s. 42–43).

[43] Por. UPM II, s. 16. Echo tych rozważań odnajdujemy w 412 paragrafie *Dociekań filozoficznych,* w których Wittgenstein pisze o „zawrocie głowy, który pojawia się zwykle, gdy dokonujemy sztuczek logicznych. (O taki sam zawrót głowy przyprawiają nas pewne twierdzenia teorii mnogości)" (DF § 412).

rozważania mogą nas doprowadzić do powiedzenia, że w jednym centymetrze sześciennym mieści się 10^{10} dusz. Dlaczego więc tego nie mówimy? Ponieważ nie jest to do niczego przydatne. Ponieważ wprawdzie przywołuje na myśl pewien obraz, z obrazem tym jednak nie potrafimy dalej nic zrobić" (UPM II, s. 36). Obraz nieskończoności, który powstaje za sprawą pojęć stworzonych przez Cantora, pozostawia nas jakby w zawieszeniu, to znaczy nie wiemy, jaki jest jego związek z rachunkiem. Na pewno nie jest to bowiem taki związek jak między obrazem | | | | | | | a liczbą 7 (por. UPM II, s. 35). Najlepiej byłoby pozbyć się tego obrazu, w samym rachunku nie ma, według Wittgensteina, niczego nieskończonego. Co więcej, jeśli bliżej przyjrzymy się nieskończonym ekstensjom, to one po prostu znikają jako nonsens i zostaje sam rachunek.

Uwagi końcowe

Pora odpowiedzieć na nasze pytania postawione na początku o powody tak ostrej krytyki teorii mnogości Cantora, nieporównywalnej z krytycznymi komentarzami Wittgensteina na temat Russella, Fregego, Hilberta czy Brouwera. Wskazałbym na trzy główne motywy:

(i) Można krytykę Wittgensteina tłumaczyć częściowo jego finityzmem, niezgodą na logicyzm w wydaniu Russella i Fregego czy konstruktywistycznym w istocie podejściem do matematyki. Także przecież wśród samych matematyków opór wobec teorii Cantora nie był wcale czymś rzadkim. Wystarczy przypomnieć Leopolda Kroneckera, który traktował Cantora jako „naukowego szarlatana", renegata i demoralizatora młodzieży. Z kolei Henri Poincaré nazwał teorię mnogości „interesującym przyczynkiem patologicznym" i przewidywał, że „następne pokolenia będę traktowały *Mengenlehre* jako chorobę, przez którą się przeszło"[44]. Tak więc na tle tych negatywnych ocen krytyka Wittgensteina w zasadzie nie powinna specjalnie zaskakiwać. Dziwić może i powinien natomiast jej czas, kiedy teoria Cantora była już dobrze ugruntowaną dziedziną matematyki i odgrywała istotną rolę w wielu jej obszarach. Jednakże dla Wittgensteina takie wewnątrzmatematyczne aplikacje nie były wystarczającym argumentem, by uznać teorię mnogości za coś ważnego, ponieważ nie o takie wewnątrzmatematyczne zastosowanie

[44] Por. Dauben, 1990, s. 1, 134–137.

mu chodziło, ale o zastosowanie poza matematyką w świecie rzeczywistym. Autor *Dociekań* poważnie potraktował empiryczną aplikację zdań matematycznych. W tej perspektywie twierdzenia teorii mnogości wydawały mu się „świetlistymi konstrukcjami pojęciowymi" (UPM II, s. 16), które są w naszym życiu codziennym bezużyteczne. Matematykę traktował jak część ludzkiej aktywności, część tego, co nazywał naszym sposobem życia (*Lebensform*).

(ii) Gramatyczne podejście do zdań matematyki, koncentracja na *prozie*, która jest przecież bliższa codziennym praktykom niż *rachunki*, ujawniała ogromne trudności semantyczne dyskursu o nieskończoności. Teoriomnogościowa gramatyka Cantora nie była dla Wittgensteina przejrzysta, gdyż wykraczała poza dobrze nam znane codzienne „gry językowe", w których słowa „nieskończony" używamy najczęściej w sensie negatywnym jako coś, co nie ma końca. Wyprawa w otchłanie nieskończoności aktualnej kończyła się dla niego prozą obracającą się na „jałowym biegu" albo wejściem na gładki lód, po którym nie można chodzić, ponieważ nie ma tarcia. Inną sprawą, trudną i pozostawioną bez jasnej odpowiedzi, jest pytanie, czym miałby być, wedle Wittgensteina, ów „szorstki grunt" w matematyce, po którym chcemy chodzić.

(iii) To wykraczanie teorii mnogości poza granice „gier językowych" miało też światopoglądowe oblicze. Kto wie, czy nie było ono nieświadomym źródłem niechęci autora *Traktatu* do dzieła Cantora? Henrik Von Wright w eseju *Wittgenstein i jego czasy* pisał o dwóch niezdrowych nawykach myślowych, które wedle Wittgensteina dewastująco wpływały na kulturę jego epoki: teorii mnogości i behawioryzmie. „Gdyby dane mu [Wittgensteinowi – P.D.] było oglądać teorię mnogości w roli podstawy nauczania matematyki dzieci w wielu czy też w większości krajów, bez wątpienia byłby zdegustowany, a może uznałby to za świadectwo końca tego, co zwykliśmy nazywać matematyką" (von Wright, 2000, s. 147). Epokę, w której przyszło mu żyć, Wittgenstein charakteryzował za Spenglerem bardzo negatywnie, jako cywilizację – czas zmierzchu i upadku kultury. Uważał, że duch, w którym pisze, jest inny niż duch wielkiego nurtu cywilizacji europejskiej i amerykańskiej, który „wyraża się w postępie, w budowaniu coraz większych i bardziej skomplikowanych struktur" (PR, s. 8). Jego celem było natomiast dążenie do jasności i przejrzystości. Przyczyn upadku kultury i przekształcenia jej w cywilizację dopatrywał się w dążeniu do wykraczania poza „gry językowe" i budowaniu wyrafinowanych konstrukcji myślowych w rodzaju teorii mnogości Cantora, które jednak nie są związane z żadną formą życia. Tworzenie takich śmiałych wizji jest przekraczaniem granic tego, co sensowne, granic codziennego użycia języka w danej „grze językowej" opartej na zbiorze podzielnych wspólnie reguł i sposobów życia. Pojęcia teorii mnogości są jakby na zewnątrz, poza domem, poza tym, co zwykle robimy. Tworzą dyskurs, który wiedzie nas poza horyzont codzienności, potoczności, poza to, co jest nam bliskie i znane. Wraz z nim musimy opuścić obszar społecznych praktyk, pozostawić dom i wspólnotę, a to oznacza zerwanie więzi, utratę orientacji i samotność. Filozofowie nieskończoności zabierają nas w podróż w nieznane, namawiają, byśmy opuścili szorstki grunt tradycji albo byśmy nie słuchali przykazania o efektywnej konstruowalności twierdzeń egzystencjalnych w matematyce. Ale ku czemu mamy zmierzać, gdzie jest to miejsce? Sprzeciw Wittgensteina wobec teorii mnogości brał się nie tyle z obawy przed nieznanym, lecz raczej ze zrozumienia konsekwencji porzucenia naszych codziennych praktyk – braku orientacji i wyobcowania.

Krytyka Wittgensteina wyrażona została w języku, który może budzić kontrowersje, a nawet pewne zaskoczenie. Używał sformułowań wieloznacznych, metaforycznych, skrótowych, których sensu trzeba się często domyślać (w końcu nie były przeznaczone do druku). Bardzo trudno jest oddzielić w jego dyskursie to, co zalicza do prozy błędnej, a co do prozy oświecającej. Trudno na przykład nazwać błędną prozą coś, co okazało się jednym z największych osiągnięć Cantora, czyli jego twierdzenie o nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych. Jak podkreśla Bernays[45] w twierdzeniu, że nieprzeliczalność liczb rzeczywistych jest udowodniona metodą przekątniową, nie ma niczego zwodniczego. Wittgenstein mówił o prozie, za pomocą której matematycy objaśniają swe formalizacje, co robili także Cantor i Dedekind, i postulował pozbycie się jej jako szkodliwego metafizycznego naddatku, ale sam przecież tę prozę uprawiał, w określony sposób interpretując dokonania wspomnianych matematyków. Krytykował ich nie jako matematyk (co sam wielokrotnie podkreślał), jego rozważania nie są *rachunkiem*, ale jedną *prozę* zastępują drugą. Opowieść Platońską opowieścią finitystyczną i konstruktywistyczną. Powracający temat jego krytycznej fugi, problem istnienia nieskończonych ekstensji matematycznych, jest w istocie problemem filozoficznym, a nie matematycznym. Czy będziemy Platonikami, opowiadając się za nieskończonością aktualną, czy

[45] Por. Bernays, 1959, s. 22.

konstruktywistami, stojąc na stanowisku nieskończoności potencjalnej, jest dla matematyki obojętne. Kiedy mówimy na przykład, że dany ciąg jest rozbieżny do plus lub minus nieskończoności, albo o granicy ciągu a_n przy *n* dążącym do nieskończoności, albo kiedy definiujemy ciąg jako funkcję, której dziedziną jest nieskończony podzbiór zbioru liczb naturalnych, to jest całkiem obojętne, czy nieskończoność rozumiemy aktualnie czy potencjalnie. Albo też inaczej: dany ciąg jest rozbieżny do nieskończoności, jakkolwiek byśmy jej nie rozumieli. Jeśli matematykę potraktujemy jako rachunek, co postulował przecież sam Wittgenstein, to dla rachunku jest całkowicie bez znaczenia, czy na przykład liczby rzeczywiste uznamy za nieskończone ekstensje czy za reguły. Również definicja zbioru nieskończonego Dedekinda, tak bardzo krytykowana w *The Big Typescript*, nie musi się troszczyć o to, czy będziemy mówić o możliwości czy rzeczywistości jedno-jednoznacznego przyporządkowania podklasy całej klasie.

Czy wobec tego Wittgenstein szedł złą drogą, jak twierdził Putnam? Na pewno szedł konsekwentnie swoją własną drogą prowadzącą bardziej przez teren filozofii, którą rozumiał jako badanie słów co do zasadności ich użycia, a więc jako przedsięwzięcie z istoty pojęciowej natury. Na matematykę patrzył w nieco inny sposób niż matematycy, to znaczy jako na przykład ludzkiej aktywności, tworzenia reguł i wzorców postępowania, które kierują naszym życiem, a nie jak na dziedzinę prawd, które się odkrywa. Jak pisał: „Matematyk jest wynalazcą, nie odkrywcą" (UPM II, s. 168). Kąśliwa uwaga Beranysa: „Wittgenstein argumentuje [w kwestii nieskończoności – P.D.] jakby matematyka istniała prawie wyłącznie w celach prowadzenia domu" (Bernays, 1959, s. 22) nie byłaby dla niego krytyką, ale w pewnym sensie pochwałą.

Wykaz stosowanych skrótów pism L. Wittgensteina

BT = Big *Typescript: TS 213* (2005). German-English Scholars' Edition. Red. C.G. Luckhard, M.A. E. Aue. Oxford: Blackwell.

D = *Dzienniki 1914–1916* (1999). Tłum. M. Poręba. Warszawa: Wydawnictwo Spacja.

LCA = *Lectures and Conversations on Aesthetics, Psychology, and Religious Belief* (1967 [2007]). Red. C. Berrett. Oxford: Basil Blackwell.

LFM = *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics Cambridge 1939* (1976). Red. C. Diamond. Hassocks, Sussex: Harvester Press.

MS = rękopisy Wittgensteina według klasyfikacji Georga H. von Wrighta. Por. G.H. von Wright (1982). *Wittgenstein*. Oxford: Basil Blackwell, s. 32–63.

PG = *Philosophical Grammar* (1974). Red. R. Rhees. Tłum. A. Kenny. Oxford: Basil Blackwell.

PR = *Philosophical Remarks* (1975). Red. R. Rhees. Oxford: Basil Blackwell.

TLP = *Tractatus logico-philosophicus* (1997). Tłum. B. Wolniewicz, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

UPM = *Uwagi o podstawach matematyki* (2000). Tłum. M Poręba. Warszawa: Wydawnictwo KR.

WLC = *Wittgenstein: Lectures, Cambridge 1930–1933. From the Notes of G.E.*

Moore (2016). Red. D. Stern, B. Rogers, G. Citron. Cambridge: Cambridge University Press.

WWK = *Wittgenstein und der Wiener Kreis*. *Werkausgabe*. T. 3. (1984). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Bibliografia

Bernays, P. (1959). Comments on L. Wittgenstein's „Remarks on Foundation of Mathematics". *Ratio*, *2* (1), 1–22.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Red. E. Zermelo. Berlin: Verlag von Julius Springer.

Cantor, G. (2003). O pozaskończoności. W: R. Murawski (wybór, przekład i komentarze), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych* (s. 174–196). Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Da Silva, J.J. (1993). Wittgenstein on Irrational Numbers. W: K. Puhl (red.), *Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Akten des 15. Internationalen Wittgenstein-Symposiums* (s. 93–100). Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Dauben, J.W. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press.

Dedekind, R. (1909). *Theory of Numbers. I: Continuity and Irrational Numbers II: The Nature and Meaning of Numbers*. Tłum. W.W. Beman. Chicago: Open Court Publishing Company.

Dedekind, R. (2003), Ciągłość a liczby niewymierne. Tłum. R. Murawski. W: R. Murawski (wybór, przekład i komentarze), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów* *klasycznych* (s. 152–167). Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Dawson, R. (2014). Wittgenstein on Pure and Applied Mathematics. *Synthese*, *191*, 4143–4148.

Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Second revised edition. Basel–Boston–Berlin: Birkhäser.

Floyd, J., Mühlhölzer, F. (2020). *Wittgenstein's Annotations to Hardy's Course of Pure Mathematics: An Investigation of Wittgenstein's Non-Extensionalist Understanding of the Real Numbers*. Cham: Springer.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. London–New York: Routledge.

Frege, G. (1993). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Red. I. Angelelli. Hildesheim–Zürich–New York: Georg Olms Verlag.

Glock, H.-J. (2001). *Słownik Wittgensteinowski*. Tłum. M. Hernik, M. Szczubiałka. Warszawa: Wydawnictwo Spacja.

Gomułka, J. (2016). *Rachunek. Filozofia nauk formalnych i jej związek z konepcją podmiotu we wczesnym i średnim okresie twórczości Ludwiga Wittgensteina*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II.

Kuratowski, K., Mostowski, A. (1978). *Teoria mnogości*. Warszawa: PWN.

Kuusela, O. (2019). *Wittgenstein on Logic as the Method of Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Maddy P. (1993). Wittgenstein's Anti-Philosophy of Mathematics. W: V. Phul (red.), *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* (s. 42–72). Vienna: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Marion, M. (1998). *Wittgenstein, Finitism, and The Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Methven, S.J. (2015). *Frank Ramsey and the Realistic Spirit*. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Methven, S.J. (2020). Ramsey's Record: Wittgenstein on Infinity and Generalizations. *British Journal of History of Philosophy*, *18* (6), 1116–1133.

Moore, A.W. (1991). *Infinity*. London: Routledge.

Murawski R. (2021). On the Reception of Cantor's Theory of Infinity (Mathematicians vs. Theologians). W: M. Trepczynski (red.), *Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics* (s. 211–237). Leiden: Brill.

Murawski R. (2018). *Szkice z filozofii i historii matematyki i logiki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Pérez-Escobar, J.A., Sarikaya, D. (2022). Purifying Applied Mathematics and Applying Pure Mathematics: How a Late Wittgensteinian Perspective Sheds Light onto the Dichotomy. *European Journal for Philosophy of Science*, *12* (1), 1–22.

Potter, M. (2000). *Reason's Nearest Kin. Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford: Oxford University Press.

Putnam, H. (2007). Wittgenstein and the Real Numbers. W: A. Crary (red.), *Wittgenstein and the Moral Life. Essays in Honor of Cora Diamond* (s. 235–251). Cambridge: The MIT Press.

Rodych, V. (1995). Pasquale Frascolla, „Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". *Philosophia Mathematica*, *3*, 271–288.

Rodych, V. (1997). Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability and Application. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *38* (2), 195–225.

Rodych, V. (2000). Wittgenstein's Critique of Set Theory. *Southern Journal of Philosophy*, *37*, 281–319.

Rotter, K. (2006). *Gramatyka filozoficzna w dobie sporu o podstawy matematyki. Eseje o drugiej filozofii Wittgensteina*. Opole: Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego.

Ramsey, F. (1950). General Propositions and Causality. W: F. Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. Red. R.B. Braithwaite (s. 237–256). London: Routledge.

Schroeder, S. (2014). Mathematical Propositions as Rules of Grammar. *Grazer Philosophische Studien*, *89* (1), 23–38.

Schroeder, S. (2020). *Wittgenstein on Mathematics*. New York: Routledge.

Shanker, S. (1987). *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. London – New York: Routledge.

Wright, G.H. von (1982). *Wittgenstein*. Oxford: Basil Blackwell.

Wright, G.H. von (2000). Wittgenstein i jego czasy. W: L. Wittgenstein, *Uwagi różne*. Tłum. M. Kowalewska (s. 141–157). Warszawa: Wydawnictwo KR.

Wrigley M. (1998). A Note on Arithmetic and Logic in the „Tractatus". *Acta Analytica*, *21*, 192–131.

Nota o autorze

Piotr Dehnel – prof. dr hab., pracuje w Dolnośląskiej Szkoły Wyższej i w Akademii Sztuk Pięknych we Wrocławiu. Zainteresowania naukowe: filozofia współczesna, zwłaszcza myśl Ludwiga Wittgensteina. Ostatnio opublikował książkę *The Radial Method of the Middle Wittgenstein. In the Net of Language* (2022) oraz przetłumaczył i opracował pismo Ludwiga Wittgensteina *The Big Typescript* (fragmenty) (2019).

Adres for correspondence: ul. Strzegomska 55, 53-611 Wrocław. E-mail: piotr.dehnel@dsw.edu.pl.

Cytowanie

Dehnel, P. (2023). Gramatyka nieskończoności. Ludwiga Wittgensteina krytyka teorii mnogości. *Analiza i Egzystencja*, *63* (3), 55–87. DOI: 10.18276/aie.2023.63-03.